

\mathcal{D} -MODULES ET GEOMETRIE DES TISSUS DE \mathbb{C}^2

ALAIN HÉNAUT

§ 0. Introduction.

On désigne par $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{z_1, z_2\}$ l'anneau des séries entières convergentes à deux variables et l'on pose $\partial_1 = \partial/\partial z_1$, $\partial_2 = \partial/\partial z_2$.

Soient n champs de vecteurs $X_i = A_i\partial_1 + B_i\partial_2$ ($n \geq 2$), à coefficients dans \mathcal{O} et deux à deux linéairement indépendants (i.e. $(A_iB_j - A_jB_i)(0) \neq 0$ pour $1 \leq i < j \leq n$). On s'intéresse aux solutions du problème suivant: ce sont les n -uplets $(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{O}^n$ tels que $X_i(f_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $d(f_1 + \dots + f_n) = 0$; l'analogue réel correspond aux équations de la *résonance* étudiées par Joly et Rauch (cf. [J-R]).

Dans ce qui suit, on étudie ce problème du point de vue des \mathcal{D} -modules; on montre que la dimension $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}$ du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathcal{S} des solutions est finie et que l'on a les inégalités suivantes:

$$n \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} \leq n + \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

On montre également que cette majoration est optimale puisque la borne est atteinte lorsque les n champs de vecteurs sont à coefficients constants. On étudie complètement le cas de 3 champs de vecteurs. Enfin, on montre comment ces questions sont reliées à la géométrie des tissus étudiée par Blaschke et ses élèves autour de 1930; une caractérisation des 3-tissus de \mathbb{C}^2 de rang maximum est obtenue.

L'auteur remercie Daniel Barlet, Roger Gay et Jean-Luc Joly; tous trois pour des raisons diverses ont permis que tissus et \mathcal{D} -modules résonnent!

§ 1. Finitude de $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}$.

On désigne par \mathcal{D} l'anneau des opérateurs différentiels (linéaires et d'ordre fini) à coefficients dans \mathcal{O} et l'on considère la suite exacte de \mathcal{D} -modules à gauche

$$\mathcal{D}^{n+2} \rightarrow \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{M} = \mathcal{D}^n / \text{Im } \rho \rightarrow 0$$

où l'homomorphisme ρ est défini, dans les bases canoniques, par la matrice d'opérateurs différentiels suivante:

$$\rho = \begin{bmatrix} X_1 & & & \partial_1 & \partial_2 \\ & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & \cdot & \cdot \\ & & & X_n & \partial_1 & \partial_2 \end{bmatrix}$$

Tout élément $(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{O}^n$ de \mathcal{S} détermine un unique élément du \mathbb{C} -espace vectoriel $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ des homomorphismes de \mathcal{D} -modules à gauche de \mathcal{M} dans \mathcal{O} et inversement (cf. par exemple [P]), ce que l'on se permettra d'écrire $\mathcal{S} = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on désigne par \mathcal{D}_k l'espace vectoriel des opérateurs différentiels d'ordre inférieur ou égal à k et l'on pose $\mathcal{D}_{-1} = 0$; alors $\bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{D}_{k-1} = \mathcal{O}[\xi_1, \xi_2] = \mathcal{O}[\xi]$ est l'anneau gradué des polynômes en ξ_1 et ξ_2 à coefficients dans \mathcal{O} . Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{M}_k = \mathcal{D}_k / \text{Im } \rho \cap \mathcal{D}_k$ et l'on pose $\mathcal{M}_{-1} = 0$; on peut identifier \mathcal{M}_{k-1} à son image dans \mathcal{M}_k et ainsi $\text{gr}(\mathcal{M}) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{M}_k / \mathcal{M}_{k-1}$ est un $\mathcal{O}[\xi]$ -module gradué de type fini dont on note $\text{mult } \text{gr}(\mathcal{M})$ la multiplicité. La racine de l'annulateur de $\text{gr}(\mathcal{M})$ est un idéal homogène de $\mathcal{O}[\xi]$ et définit un germe, à l'origine de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$, d'ensemble analytique ξ -conique car (\mathcal{M}) qu'on appelle la variété caractéristique de \mathcal{M} (si $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{S}$ alors $\text{Ann } \text{gr}(\mathcal{M})$ est l'idéal de $\mathcal{O}[\xi]$ engendré par les symboles principaux de tous les éléments de \mathcal{S}); l'entier non nul défini par $\text{mult}(\mathcal{M}) = \text{mult } \text{gr}(\mathcal{M})$ s'appelle la multiplicité de \mathcal{M} (cf. par exemple [B]).

Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère le diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{k-2}^{n+2} & \hookrightarrow & \mathcal{D}_{k-1}^{n+2} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{k-1}^{n+2} / \mathcal{D}_{k-2}^{n+2} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \rho_{k-1} & & \downarrow \rho_k & & \downarrow (\bar{\rho})_k \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}_{k-1}^n & \hookrightarrow & \mathcal{D}_k^n & \longrightarrow & \mathcal{D}_k^n / \mathcal{D}_{k-1}^n \longrightarrow 0 \end{array}$$

où ρ_k est induit par ρ et $(\bar{\rho})_k$ est obtenu par passage aux quotients. Ainsi $\mathcal{S}_k = \text{Coker } (\bar{\rho})_k$ est aussi le conoyau de l'homomorphisme naturel $\mathcal{D}_{k-1}^n / \text{Im } \rho_{k-1} \rightarrow \mathcal{D}_k^n / \text{Im } \rho_k$; de plus $\mathcal{S} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{S}_k$ est un $\mathcal{O}[\xi]$ -module gradué de présentation finie qui est le conoyau du morphisme $\bar{\rho}: \mathcal{O}[\xi]^{n+2} \rightarrow \mathcal{O}[\xi]^n$ défini,

dans les bases canoniques, par la matrice suivante:

$$\bar{\rho} = \begin{bmatrix} \ell_1 & & \xi_1 & \xi_2 \\ & 0 & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \ell_n & \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix}$$

où $\ell_i = A_i \xi_1 + B_i \xi_2$ est le symbole principal de X_i . Puisque $\text{Im } \rho_k \subset \text{Im } \rho \cap \mathcal{D}_k^n$, on a le diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{D}_{k-1}^n / \text{Im } \rho_{k-1} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{k-1}^n / \text{Im } \rho \cap \mathcal{D}_{k-1}^n & = & \mathcal{M}_{k-1} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \mathcal{D}_k^n / \text{Im } \rho_k & \longrightarrow & \mathcal{D}_k^n / \text{Im } \rho \cap \mathcal{D}_k^n & = & \mathcal{M}_k & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

D'après ce qui précède, par passage aux quotients, on obtient une *surjection* $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow \text{gr}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{O}[\xi]$ -modules gradués de type fini.

REMARQUE 1. En général φ n'est pas injective, cependant c'est le cas si les n champs de vecteurs sont à coefficients constants; en effet, dans cette situation on a $\text{Im } \rho_k = \text{Im } \rho \cap \mathcal{D}_k^n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit $F_0(\mathcal{G})$ le 0-ième idéal de Fitting de \mathcal{G} (i.e. l'idéal de $\mathcal{O}[\xi]$ engendré par les mineurs d'ordre n de la matrice $\bar{\rho}$), alors on a $\sqrt{F_0(\mathcal{G})} = (\xi_1, \xi_2)$. En effet, puisque $F_0(\mathcal{G})$ est homogène, via l'extension $\mathcal{O}[\xi] \rightarrow \mathbb{C}\{z, \xi\} = \mathbb{C}\{z_1, z_2, \xi_1, \xi_2\}$, il suffit de montrer que $\sqrt{F_0(\mathcal{G}) \cdot \mathbb{C}\{z, \xi\}} = (\xi_1, \xi_2) \cdot \mathbb{C}\{z, \xi\}$; or ceci revient à montrer, d'après le théorème des zéros de Hilbert dans $\mathbb{C}\{z, \xi\}$, que l'ensemble des zéros Z de $F_0(\mathcal{G}) \cdot \mathbb{C}\{z, \xi\}$ est $\mathbb{C}^2 \times \{0\}$. Par définition de $\bar{\rho}$, on a $\mathbb{C}^2 \times \{0\} \subset Z$. Soit $(z, \xi_1, \xi_2) \in Z$, alors pour $1 \leq i \leq 2$ on a $\ell_1 \dots \widehat{\ell_j} \dots \ell_n \xi_i = 0$ pour $1 \leq j \leq n$ où $\ell_k = A_k(z) \xi_1 + B_k(z) \xi_2$; grâce à l'hypothèse d'indépendance et la règle de Cramer, on obtient en regroupant les différentes équations deux à deux

$$\ell_1 \dots \widehat{\ell_j \ell_{j+1}} \dots \ell_n \xi_i^2 = 0 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n,$$

puis en réitérant $\ell_1 \dots \widehat{\ell_j \ell_{j+1} \ell_{j+2}} \dots \ell_n \xi_i^3 = 0$ pour $1 \leq j \leq n, \dots, \ell_n \xi_i^{n-1} = \ell_1 \xi_i^{n-1} = 0$ soit $\xi_i^n = 0$ d'où $Z = \mathbb{C}^2 \times \{0\}$.

On a $\sqrt{F_0(\mathcal{G})} = \sqrt{\text{Ann } \mathcal{G}}$ (cf. [T]) et la surjection φ montre que l'on a $\text{Ann } \mathcal{G} \subset \text{Ann gr}(\mathcal{M})$, d'où $\sqrt{\text{Ann } \mathcal{G}} = \sqrt{\text{Ann gr}(\mathcal{M})} = (\xi_1, \xi_2)$ puisque par définition $\text{Ann gr}(\mathcal{M}) \subset (\xi_1, \xi_2)$. Autrement dit, on a $\text{car}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}^2 \times \{0\}$.

PROPOSITION 1. *Le \mathcal{D} -module à gauche \mathcal{M} est \mathcal{D} -isomorphe à $\mathcal{O}^{\text{mult}(\mathcal{M})}$ et $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ est finie et égale à $\text{mult}(\mathcal{M})$. De plus, on a $\text{mult}(\mathcal{M}) \leq \text{mult}(\mathcal{G})$ avec égalité si les n champs de vecteurs sont à coefficients constants.*

DÉMONSTRATION. Puisque $\text{car}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}^2 \times \{0\}$, \mathcal{M} est \mathcal{D} -isomorphe à \mathcal{O}^m (cf. par exemple [B]). D'où $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}) = (\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}))^m = \mathbb{C}^m$ puisque $\mathcal{O} = \mathcal{D}/(\partial_1, \partial_2)$. D'après les propriétés de la multiplicité (cf. loc. cit.) et puisque $\text{gr}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ on a $\text{mult}(\mathcal{M}) = \text{mult}(\mathcal{O}^m) = m$; de plus, grâce à la surjection φ on a $\text{mult}(\mathcal{M}) \leq \text{mult}(\mathcal{S})$ avec égalité si les n champs de vecteurs sont à coefficients constants d'après la remarque 1.

EXEMPLES. Soient $X_1 = \partial_1$ et $X_2 = \partial_2$; pour $X_3 = \partial_1 + \partial_2$ ou $(1 + z_1)\partial_1 + \partial_2$ ou $(1 + z_2)\partial_1 + \partial_2$ on obtient $\text{dim}_{\mathbb{C}} \mathcal{S} = 4 = \text{mult}(\mathcal{S})$, alors que pour $X_3 = (1 + z_1 + z_2)\partial_1 + \partial_2$ on a $\text{dim}_{\mathbb{C}} \mathcal{S} = 3 < \text{mult}(\mathcal{S}) = 4$.

§2. Majoration de $\text{dim}_{\mathbb{C}} \mathcal{S}$.

On va déterminer $\text{mult}(\mathcal{S})$ en comparant les situations avec n et $n + 1$ champs de vecteurs ($n \geq 2$).

On désigne par $\mathcal{G}(n)$ le $\mathcal{O}[\xi]$ -module gradué de présentation finie correspondant aux symboles des n premiers champs de vecteurs X_i (i.e. $\mathcal{G}(n) = \text{Coker } \bar{\rho}(n)$) où comme précédemment

$$\bar{\rho}(n) = \begin{pmatrix} \ell_1 & & \xi_1 & \xi_2 \\ & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \ell_n & \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix}.$$

Le diagramme commutatif aux lignes exactes:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}[\xi] & \xrightarrow{m} & \mathcal{O}[\xi]^{n+1+2} & \xrightarrow{P} & \mathcal{O}[\xi]^{n+2} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \ell_{n+1} & & \downarrow \bar{\rho}(n+1) & & \downarrow \bar{\rho}(n) \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}[\xi] & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{O}[\xi]^{n+1} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{O}[\xi]^n \longrightarrow 0 \end{array}$$

où $m(P) = (0, \dots, 0, P, 0, 0)$

$$P(P_1, \dots, P_{n+3}) = (P_1, \dots, P_n, \widehat{P_{n+1}}, P_{n+2}, P_{n+3})$$

$$\ell_{n+1}(P) = P\ell_{n+1}$$

$$\mu(C) = (0, \dots, 0, C)$$

$$\pi(a_1, \dots, a_{n+1}) = (a_1, \dots, a_n)$$

induit la suite exacte de $\mathcal{O}[\xi]$ -modules gradués:

$$\mathcal{O}[\xi]/(\ell_{n+1}) \xrightarrow{\tilde{\mu}} \mathcal{G}(n+1) \xrightarrow{\tilde{\mu}} \mathcal{G}(n) \longrightarrow 0$$

et l'on a $\text{Ker } \tilde{\mu} = \{P + (\ell_{n+1})$; il existe $(P_1, \dots, P_{n+1}) \in \mathcal{O}[\xi]^{n+1}$ tel que $P - P_{n+1}\ell_{n+1} = -P_1\ell_1 = \dots = -P_n\ell_n\}$.

LEMME 1. On a $\text{Ker } \tilde{\mu} = \left(\ell_{n+1}, \prod_{i=1}^n \ell_i \right) / (\ell_{n+1})$.

DÉMONSTRATION. Si $Y = P_1\ell_1 = \dots = P_n\ell_n$, il suffit de montrer que $Y \in \left(\prod_{i=1}^n \ell_i \right)$, or $P_1\ell_1 = P_2\ell_2$ s'écrit $(P_1A_1 - P_2A_2)\xi_1 = (-P_1B_1 + P_2B_2)\xi_2$ ce qui montre qu'il existe $r \in \mathcal{O}[\xi]$ tel que

$$\begin{cases} P_1A_1 - P_2A_2 = r\xi_2 \\ -P_1B_1 + P_2B_2 = r\xi_1 \end{cases}$$

Mais $A_1B_2 - A_2B_1$ est inversible dans \mathcal{O} , d'où d'après la règle de Cramer $P_1 = Q_2(B_2\xi_2 + A_2\xi_1) = Q_2\ell_2$ où $Q_2 \in \mathcal{O}[\xi]$. Par le même procédé, on obtient que $P_1 = Q_2\ell_2 = Q_3\ell_3 = \dots = Q_n\ell_n$ où $Q_i \in \mathcal{O}[\xi]$; puis, en réitérant $Q_2 = R_3\ell_3 = \dots = R_n\ell_n$ où $R_j \in \mathcal{O}[\xi], \dots, U_{n-2} = V_{n-1}\ell_{n-1} = \mathcal{V}_n\ell_n$ où $V_k \in \mathcal{O}[\xi]$ et $V_{n-1} = W_n\ell_n$ où $W_n \in \mathcal{O}[\xi]$; d'où en regroupant $Y = W_n\ell_1\ell_2 \dots \ell_n \in \left(\prod_{i=1}^n \ell_i \right)$, ce qui prouve le résultat.

Ainsi, d'après le lemme 1 et ce qui précède, on obtient une suite exacte de $\mathcal{O}[\xi]$ -modules de type fini:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}[\xi] / \left(\ell_{n+1}, \prod_{i=1}^n \ell_i \right) \xrightarrow{\tilde{\mu}} \mathcal{G}(n+1) \xrightarrow{\tilde{\mu}} \mathcal{G}(n) \longrightarrow 0$$

où $\tilde{\mu}$ est induit naturellement par $\tilde{\mu}$; d'après le §1, on a $\sqrt{\text{Ann } \mathcal{G}(n)} = (\xi_1, \xi_2)$ pour $n \geq 2$, ce qui montre que $\sqrt{\left(\ell_{n+1}, \prod_{i=1}^n \ell_i \right)} = (\xi_1, \xi_2)$ et que l'on a $\text{mult } \mathcal{G}(n+1) = \text{mult } \mathcal{G}(n) + \text{mult } \mathcal{O}[\xi] / \left(\ell_{n+1}, \prod_{i=1}^n \ell_i \right)$ (cf. [B]).

D'après l'hypothèse d'indépendance, on peut toujours supposer que $\ell_{n+1} = \xi_2$; mais dans ce cas, tous les A_i ($1 \leq i \leq n$) sont inversibles dans \mathcal{O} , d'où

$$\begin{aligned} \text{mult } \mathcal{O}[\xi] / \left(\ell_{n+1}, \prod_{i=1}^n \ell_i \right) &= \text{mult } \mathcal{O}[\xi_1] / \left(\prod_{i=1}^n A_i \xi_1 \right) \\ &= \text{mult } \mathcal{O}[\xi_1] / (\xi_1^n) = \text{mult}(\mathcal{O}^n) = n. \end{aligned}$$

THÉORÈME 1. Soit $n \geq 2$. On a $\text{mult } \mathcal{G}(n) = n + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, et les inégalités suivantes:

$$n \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} = \text{mult}(\mathcal{M}) \leq n + \frac{1}{2}(n-1)(n-2);$$

de plus, si les n champs de vecteurs sont à coefficients constants, alors

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} = n + \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

DÉMONSTRATION. Les constantes sont solutions d'où $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} \geq n$. Grâce à ce qui précède et la proposition 1, il suffit par récurrence sur n d'établir que $\text{mult } \mathcal{G}(2) = 2$. On a le diagramme commutatif (aux lignes exactes) suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}[\xi]^4 & \xrightarrow{P(2)} & \mathcal{O}[\xi]^2 & \longrightarrow & \mathcal{G}(2) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow M & & \downarrow \text{id} & & & & \\ \mathcal{O}[\xi]^4 & \xrightarrow{H} & \mathcal{O}[\xi]^2 & \longrightarrow & \mathcal{O}^2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où $H = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix}$ correspond à la résolution canonique de Hilbert de $\mathcal{O}^2 = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ et

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 1 & 0 \\ B_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_2 & 1 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Puisque $\det M = -A_1 B_2 + A_2 B_1$ est inversible dans \mathcal{O} , $\mathcal{G}(2)$ et \mathcal{O}^2 sont $\mathcal{O}[\xi]$ -isomorphes, d'où $\text{mult } \mathcal{G}(2) = 2$.

REMARQUE 2. Pour $n = 2$, on a $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} = 2$ (!).

§ 3. Passage de n à $n + 1$ champs de vecteurs.

a) Cas général.

Soit $n \geq 2$. On désigne par $\mathcal{M}(n)$ le \mathcal{D} -module à gauche de présentation finie correspondant aux n premiers champs de vecteurs X_i (i.e. $\mathcal{M}(n) = \text{Coker } \rho(n)$) où comme précédemment

$$\rho(n) = \begin{bmatrix} X_1 & & & \partial_1 & \partial_2 \\ & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 0 & & \cdot & \cdot \\ & & & X_n & \partial_1 & \partial_2 \end{bmatrix},$$

et l'on considère l'idéal à gauche de \mathcal{D} défini par

$$\mathcal{I}(n) = \{ Y \in \mathcal{D}; \text{ il existe } (P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{D}^n \text{ tel que } Y = P_1 X_1 = \dots = P_n X_n \}.$$

Alors, comme dans le § 2, on a une suite exacte de \mathcal{D} -modules à gauche:

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{D}/(X_{n+1}, \mathcal{I}(n)) \rightarrow \mathcal{M}(n+1) \rightarrow \mathcal{M}(n) \rightarrow 0$$

ayant tous, d'après la proposition 1, $\mathbb{C}^2 \times \{0\}$ comme variété caractéristique. D'après la proposition 1 et la résolution canonique de Hilbert de \mathcal{O} i.e.

$$0 \longrightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\partial_2 \\ \partial_1 \end{pmatrix}} \mathcal{D}^2 \xrightarrow{(\partial_1, \partial_2)} \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0,$$

on a, grâce au lemme de Poincaré, $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^i(\mathcal{M}(n), \mathcal{O}) = 0$ pour $i \geq 1$; ce qui donne, en appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\cdot, \mathcal{O})$ à (*), une suite exacte de \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie:

$$0 \rightarrow \mathcal{S}(n) \rightarrow \mathcal{S}(n+1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/(X_{n+1}, \mathcal{I}(n)), \mathcal{O}) \rightarrow 0$$

où $\mathcal{S}(n) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}(n), \mathcal{O})$ pour $n \geq 2$. Ainsi, pour $n \geq 2$ on a

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(n+1) &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(n) + \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/(X_{n+1}, \mathcal{I}(n)), \mathcal{O}) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(n) + \text{mult } \mathcal{D}/(X_{n+1}, \mathcal{I}(n)). \end{aligned}$$

De plus, on a $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(2) = 2$ d'après la remarque 2.

b) Etude de $\mathcal{S}(3)$.

LEMME 2. On a $X_2^* \delta^{-1} X_1 = X_1^* \delta^{-1} X_2$ et $\mathcal{I}(2) = (X_2^* \delta^{-1} X_1)$ où X_i^* est l'opérateur différentiel adjoint de X_i , et δ^{-1} est l'inverse dans \mathcal{O} de $\delta = A_1 B_2 - A_2 B_1$.

DÉMONSTRATION. Si $Y = P_1 X_1 = P_2 X_2$, alors $(P_1 A_1 - P_2 A_2) \partial_1 = (-P_1 B_1 + P_2 B_2) \partial_2$ ce qui montre qu'il existe $U \in \mathcal{D}$ tel que

$$\begin{cases} P_1 A_1 - P_2 A_2 = U \partial_1 \\ -P_1 B_1 + P_2 B_2 = U \partial_1 \end{cases}$$

D'où $P_1 \delta = U(\partial_1 A_2 + \partial_2 B_2) = -U X_2^*$, de même $P_2 \delta = -U X_1^*$ soit $Y = -U X_2^* \delta^{-1} X_1 = -U X_1^* \delta^{-1} X_2$. Il suffit donc de vérifier que $X_2^* \delta^{-1} X_1 = X_1^* \delta^{-1} X_2$.

On a $-X_2^* \delta^{-1} X_1 = \partial_1 A_2 \delta^{-1} A_1 \partial_1 + \partial_1 A_2 \delta^{-1} B_1 \partial_2 + \partial_2 B_2 \delta^{-1} A_1 \partial_1 + \partial_2 B_2 \delta^{-1} B_1 \partial_2$, et $-X_1^* \delta^{-1} X_2 = \partial_1 A_1 \delta^{-1} A_2 \partial_1 + \partial_1 A_1 \delta^{-1} B_2 \partial_2 + \partial_2 B_1 \delta^{-1} A_2 \partial_1 + \partial_2 B_1 \delta^{-1} B_2 \partial_2$ où tous les produits sont calculés dans \mathcal{D} . Or $\delta^{-1}(A_1 B_2 - A_2 B_1) = 1$ ce qui montre que dans \mathcal{D} , on a les relations $\partial_i \delta^{-1} A_1 B_2 = \partial_i \delta^{-1} A_2 B_1 + \partial_i$ pour $1 \leq i \leq 2$, d'où le résultat.

Ainsi, d'après ce qui précède et le théorème 1, on a

$$3 \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(3) = 2 + \text{mult } \mathcal{D}/(X_3, X_2^* \delta^{-1} X_1) \leq 4.$$

On suppose désormais que l'on a
$$\begin{cases} X_1 = A_1 \partial_1 + \partial_2 \\ X_2 = A_2 \partial_1 + \partial_2 \\ X_3 = \partial_1 \end{cases}$$

Ceci est toujours possible d'après l'hypothèse d'indépendance et puisque l'on veut seulement évaluer $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(3)$; en effet, quitte à faire un changement de variables on peut supposer que $X_3 = \partial_1$, puis éventuellement faire des divisions puisque $X_i = A_i \partial_1 + B_i \partial_2$ avec B_i inversible dans \mathcal{O} pour $i = 1$ et 2 . Alors $\delta = A_1 - A_2$, et en tant qu'idéaux à gauche de \mathcal{D} (donnés par leurs générateurs) on a $(X_3, X_2^* \delta^{-1} X_1) = (\partial_1, \partial_1(\delta^{-1} A_2) \partial_2 + \partial_2(\delta^{-1}) \partial_2 + \delta^{-1} \partial_2^2) = (\partial_1, \partial_2^2 + \alpha \partial_2)$ où l'on pose $\alpha = [\partial_1(\delta^{-1} A_2) + \partial_2(\delta^{-1})] \delta$.

THÉORÈME 2. *On a les deux éventualités possibles:*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(3) = \begin{cases} 3 & \text{si } \partial_1(\alpha) \neq 0 \\ 4 & \text{si } \partial_1(\alpha) = 0. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. On a $[\partial_1, \partial_2^2 + \alpha \partial_2] = \partial_1(\alpha) \partial_2$ d'où $\text{gr } \mathcal{D}/(X_3, X_2^* \delta^{-1} X_1) = \mathcal{O}[\xi]/(\xi_1, \xi_2^2, \partial_1(\alpha) \xi_2)$. D'où le résultat d'après ce qui précède puisque par définition $\text{mult } \mathcal{D}/(X_3, X_2^* \delta^{-1} X_1) = \text{mult } \mathcal{O}[\xi]/(\xi_1, \xi_2^2, \partial_1(\alpha) \xi_2)$.

En particulier, on a le résultat suivant:

COROLLAIRE. *Dans le cas où les 3 champs de vecteurs sont ∂_1, ∂_2 et $A \partial_1 + \partial_2$, on a les deux éventualités possibles:*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(3) = \begin{cases} 3 & \text{si } A \partial_1 \partial_2(A) \neq \partial_1(A) \partial_2(A) \\ 4 & \text{si } A \partial_1 \partial_2(A) = \partial_1(A) \partial_2(A). \end{cases}$$

§ 4. Application à la géométrie des tissus de \mathbb{C}^2 .

a) Généralités (cf. la référence classique [B-B], et [C] pour des développements récents).

On rappelle qu'un n -tissu \mathcal{F} de codimension 1 au voisinage de l'origine de \mathbb{C}^2 est défini par n feuilletages (au voisinage de l'origine de \mathbb{C}^2) dont les feuilles sont les hypersurfaces (lisses) de niveau de n éléments $F_i \in \mathcal{O}$ vérifiant $F_i(0) = 0$ et $dF_i(0) \neq 0$, tels qu'en tout point z voisin de $0 \in \mathbb{C}^2$, les espaces tangents en z aux n feuilles passant par z soient en position générale.

Un n -uplet $(g_1(F_1), \dots, g_n(F_n)) \in \mathcal{O}^n$ où $g_i \in \mathbb{C}\{t\}$ et qui vérifie

$$g_1(F_1) dF_1 + \dots + g_n(F_n) dF_n = 0$$

est appelé une relation abélienne du n -tissu \mathcal{F} ; la dimension (dont on va montrer la finitude) du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathcal{A} des relations abéliennes est un invariant géométrique du n -tissu \mathcal{F} noté $\text{rang}_{\mathbb{C}} \mathcal{F}$ et appelé le rang du n -tissu \mathcal{F} (si l'on remplace F_i par $v_i(F_i)$ où $v_i \in \mathbb{C}\{t\}$ vérifie $v_i(0) = 0$ et $v'_i(0) \neq 0$, il existe

$$h_i = \frac{g_i}{v_i'} \circ v_i^{-1} \in \mathbb{C}\{t\} \quad \text{tel que} \quad h_i(v_i F_i) = \frac{g_i(F_i)}{v_i'(F_i)} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n, \quad \text{d'où}$$

$$\sum_{i=1}^n h_i(v_i(F_i)) d(v_i(F_i)) = 0.$$

Puisque les n champs de vecteurs X_i sont deux à deux linéairement indépendants, il existe $(F_1, \dots, F_n) \in \mathcal{O}^n$ tel que $X_i(F_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$, avec $F_i(0) = 0$ et $dF_i(0) \neq 0$; ce qui montre que les F_i définissent un n -tissu \mathcal{F} et réciproquement (il suffit de poser $X_i = \frac{\partial F_i}{\partial z_2} \partial_1 - \frac{\partial F_i}{\partial z_1} \partial_2$). Soit $(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{S}$, alors $f_i = \alpha_i(F_i)$ où

$\alpha_i \in \mathbb{C}\{t\}$ et $\sum \alpha_i'(F_i) dF_i = 0$; l'application \mathbb{C} -linéaire $\Theta: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}$ définie par $\Theta(f_1, \dots, f_n) = (\alpha_1'(F_1), \dots, \alpha_n'(F_n))$ est surjective (si \tilde{g}_i est une primitive de g_i , alors

$$\Theta(\tilde{g}_1(F_1), \dots, \tilde{g}_n(F_n)) = (g_1(F_1), \dots, g_n(F_n))$$

et son noyau est constitué des solutions constantes, d'où

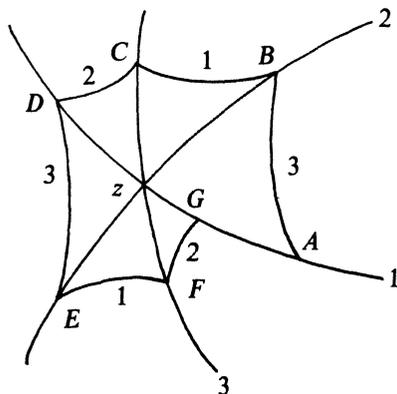
$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} = \text{rang}_{\mathbb{C}} \mathcal{F} + n$$

D'après le théorème 1, on a $\text{rang}_{\mathbb{C}} \mathcal{F} \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ ce qui, dans le cadre classique (i.e. l'analogue réel), est un résultat dû à Bol (cf. [B-B]).

b) Caractérisation des 3-tissus de C².

On dit que deux tissus (de codimension 1 au voisinage de l'origine) de C² sont *équivalents* s'ils sont transformés l'un dans l'autre par un isomorphisme analytique.

Soit \mathcal{F} un 3-tissu de C², pour z voisin de $0 \in \mathbb{C}^2$ on fait la construction suivante (précisée, à équivalence près, dans la proposition qui suit): on "trace" les trois feuilles passant par z , et on fixe un point A proche de z et sur la feuille de la famille 1 qui passe par z ; puis on "se promène" le long des feuilles du tissu \mathcal{F} , comme indiqué sur le dessin (réel!) ci-dessous (B est précisément l'unique point d'intersec-



tion de la feuille de la famille 2 qui passe par z et de la feuille de la famille 3 qui passe par A , etc. . . .).

Après un “tour” qu’on peut représenter par

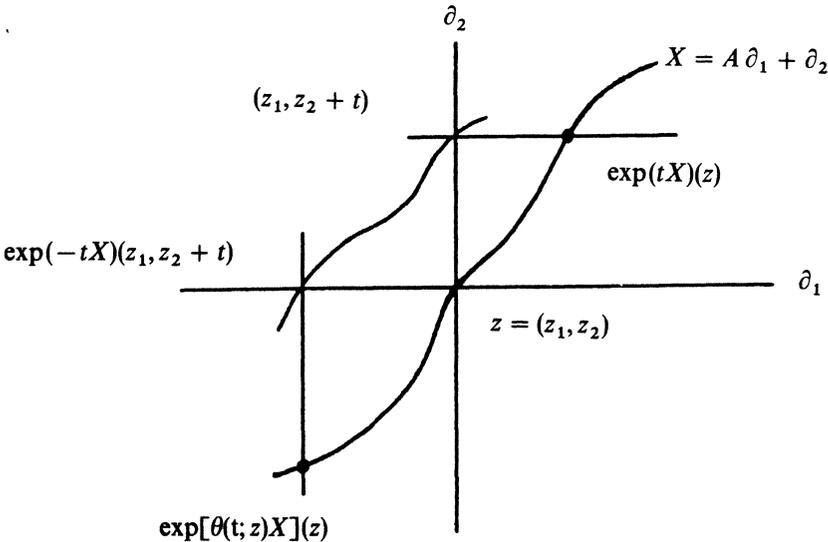
$$A \xrightarrow[1]{3} B \xrightarrow[2]{1} C \xrightarrow[3]{2} D \xrightarrow[1]{3} E \xrightarrow[2]{1} F \xrightarrow[3]{2} G,$$

on se retrouve sur la feuille de la famille 1 qui passe par z , en un point $G = G(z, A)$ éventuellement égal à A . On dit que le tissu \mathcal{F} est de *Thomsen* (ou hexagonal) si pour tout point z voisin de $0 \in \mathbb{C}^2$ et tout point A voisin de z , les points G et A coïncident.

PROPOSITION 2. Soit \mathcal{F} un 3-tissus de \mathbb{C}^2 dont les champs de vecteurs associés sont ∂_1, ∂_2 et $X = A\partial_1 + \partial_2$. Il existe un élément $\theta \in \mathcal{O}\{t\} = \mathbb{C}\{t, z_1, z_2\}$, construit à partir du flot engendré par X , où $\theta = -t + \theta_2 \cdot \frac{t^2}{2} + \theta_3 \cdot \frac{t^3}{3!} + \dots$ avec $\theta_2 = \frac{-2\partial_2(A)}{A}$ et $\theta_3 = \frac{1}{A^2} [3A \cdot \partial_2(X(A)) - 3A \cdot \partial_2^2(A) - 6X(A) \cdot \partial_2(A)]$, et tel que: \mathcal{F} est de *Thomsen* si et seulement si, on a identiquement $\theta[\theta(t; z); z] = t$.

DÉMONSTRATION. Si l’on désigne par $\exp(tX)(z)$ le flot engendré par X , on a $\exp(tX)(z) = (\psi(t; z), z_2 + t)$ où

$$\psi(t; z) = z_1 + tA(z) + \frac{t^2}{2} X(A)(z) + \frac{t^3}{3!} X^2(A)(z) + \dots$$



Puisque \mathcal{F} est un 3-tissu de \mathbb{C}^2 , A est inversible dans \mathcal{O} et le théorème des fonctions implicites montre qu'il existe un unique $\theta \in \mathcal{O}\{t\}$ vérifiant $\psi(-t; z_1, z_2 + t) = \psi(\theta(t; z); z)$ et $\theta(0; 0) = 0$. On peut donc faire le dessin (réel!) ci-dessous:

D'après ce qui précède. \mathcal{F} est de Thomsen si et seulement si on a $\theta[\theta(t; z); z] = t$.

Par définition de θ , on a $\frac{\partial^i \theta}{\partial t^i}(0, z) = \theta_i(z)$ et

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \psi}{\partial t}(-t; z_1, z_2 + t) + \frac{\partial \psi}{\partial z_2}(-t; z_1, z_2 + t) \\ = \frac{\partial \theta}{\partial t}(t; z) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}(\theta(t; z); z) \end{array} \right.$$

Or $\theta(0; z) = 0$, ce qui montre en prenant $t = 0$ que

$$-A(z) = \theta_1(z) \cdot A(z), \text{ soit } \theta_1(z) = -1.$$

En dérivant par rapport à t l'égalité (1) on obtient

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(-t; z_1, z_2 + t) - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_2 \partial t}(-t; z_1, z_2 + t) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_2^2}(-t; z_1, z_2 + t) \\ = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(t; z) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}(\theta(t; z); z) + \left[\frac{\partial \theta}{\partial t}(t; z) \right]^2 \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(\theta(t; z); z) \end{array} \right.$$

Ce qui montre en prenant $t = 0$ que l'on a

$$X(A) - 2 \partial_2(A) = \theta_2 \cdot A + X(A), \text{ soit } \theta_2 = \frac{-2 \partial_2(A)}{A}.$$

En dérivant par rapport à t l'égalité (2) on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3}(-t; z_1, z_2 + t) + 3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial z_2 \partial t^2}(-t; z_1, z_2 + t) \\ - 3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial z_2^2 \partial t}(-t; z_1, z_2 + t) + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z_2^3}(-t; z_1, z_2 + t) \\ = \frac{\partial^3 \theta}{\partial t^3}(t; z) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}(\theta(t; z); z) + 3 \frac{\partial \theta}{\partial t}(t; z) \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(t; z) \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(\theta(t; z); z) \\ + \left[\frac{\partial \theta}{\partial t}(t; z) \right]^3 \cdot \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3}(\theta(t; z); z). \end{array} \right.$$

Ce qui montre en prenant $t = 0$ que l'on a

$$-X^2(A) + 3 \partial_2(X(A)) - 3 \partial_2^2(A) = \theta_3 \cdot A - 3 \theta_2 X(A) - X^2(A),$$

soit $\theta_3 = \frac{1}{A^2} [3A \cdot \partial_2(X(A)) - 3A \cdot \partial_2^2(A) - 6X(A) \cdot \partial_2(A)]$; ce qui démontre la proposition.

EXEMPLE. Tout 3-tissu de \mathbb{C}^2 constitué de 3 familles de droites parallèles est de Thomsen; en effet, on peut supposer qu'il est défini par z_1, z_2 et $z_1 - z_2$ qui est clairement de Thomsen ($\theta(t; z) = -t$).

THÉORÈME 3. Pour un 3-tissu \mathcal{F} défini au voisinage de l'origine de \mathbb{C}^2 , on a les propriétés suivantes:

- 1) Si le tissu \mathcal{F} est de Thomsen alors son rang est maximum (i.e. $\text{rang}_{\mathbb{C}} \mathcal{F} = 1$);
- 2) Le rang de \mathcal{F} est maximum si et seulement s'il existe un point p_0 arbitrairement proche de $0 \in \mathbb{C}^2$ tel qu'au voisinage de p_0 , le tissu \mathcal{F} soit équivalent à un 3-tissu de \mathbb{C}^2 constitué de 3 familles de droites parallèles.

DÉMONSTRATION. 1) On peut supposer que les champs de vecteurs associés à \mathcal{F} sont ∂_1, ∂_2 et $X = A\partial_1 + \partial_2$. D'après la proposition 2, $\theta = -t + \theta_2 \cdot \frac{t^2}{2} + \theta_3 \cdot \frac{t^3}{3!} + \dots$ vérifie $\theta[\theta(t; z); z] = t$ ce qui impose $2\theta_3 + 3\theta_2^2 = 0$, soit $A \cdot \partial_2(X(A)) - A \cdot \partial_2^2(A) - 2X(A) \cdot \partial_2(A) + 2[\partial_2(A)]^2 = 0$. Or $X(A) = A\partial_1(A) + \partial_2(A)$, ce qui montre que l'on a $A\partial_1\partial_2(A) - \partial_1(A)\partial_2(A) = 0$. D'après le corollaire du théorème 2, on a $\text{rang}_{\mathbb{C}} \mathcal{F} = 1$ d'où le résultat.

2) \Rightarrow . Il existe une relation abélienne de \mathcal{F} , non triviale: $g_1(F_1)dF_1 + g_2(F_2)dF_2 + g_3(F_3)dF_3 = 0$; soit $Z_i = \tilde{g}_i(F_i)$ où \tilde{g}_i est une primitive de g_i , alors $dZ_1 + dZ_2 + dZ_3 = 0$ et l'on peut supposer que Z_1 et Z_2 sont des fonctions coordonnées au voisinage de p_0 où p_0 est arbitrairement proche de $0 \in \mathbb{C}^2$. D'où le résultat, puisqu'au voisinage de p_0 le tissu est défini par Z_1, Z_2 et $Z_1 + Z_2$.

\Leftarrow . (\mathcal{F}, p_0) est de rang 1 (il suffit par exemple d'utiliser le corollaire du théorème 2), d'où $\mathcal{M}(3) = \mathcal{O}^4$ d'après la proposition 1, soit $\text{rang}_{\mathbb{C}} \mathcal{F} = 1$ ce qui démontre le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [B] J. E. Björk, *Rings of Differential Operators*, North-Holland, 1979.
 [B-B] W. Blaschke et B. Bol, *Geometrie der Gewebe*, Springer, Berlin, 1938.
 [C] S. S. Chern, *Web geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 1-8.
 [J-R] J. L. Joly et J. Rauch, *Ondes oscillantes semi-linéaires en 1d*, Prépublication Bordeaux (1986).
 [P] F. Pham, *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*, Progress in Math. Birkhäuser (1979).
 [T] J. C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Springer-Verlag, 1972.