

SUR L'HOMOLOGIE DE SL_2 A COEFFICIENTS DANS L'ACTION ADJOINTE

J. L. CATHELINÉAU

Cet article contient des développements liés à l'aspect algébrique d'un célèbre théorème de J. P. Sydler ([17], [10]), qui dit que le volume et l'invariant de Dehn sont des invariants complets pour la scission des polyèdres de l'espace euclidien de dimension trois.

On sait, grâce à J. L. Dupont ([5]), reformuler le résultat de Sydler, ainsi qu'un complément de B. Jessen, de manière purement homologique, sous la forme

$$(1) \quad \begin{cases} H_1(SO(3, \mathbb{R}), \mathbb{R}^3) \simeq \Omega_{\mathbb{R}}^1 \\ H_2(SO(3, \mathbb{R}), \mathbb{R}^3) = 0. \end{cases}$$

où H est l'homologie de $SO(3, \mathbb{R})$, considéré comme groupe discret, à coefficients dans \mathbb{R}^3 muni de l'action géométrique; $\Omega_{\mathbb{R}}^1$ est ici l'espace des formes différentielles de Kähler de \mathbb{R} sur \mathbb{Q} .

Pour reprendre une remarque de J. L. Dupont dans [5], il serait intéressant de disposer d'une preuve algébrique directe de (1); à ma connaissance, on ne sait toujours pas obtenir (1) autrement que par l'intermédiaire du théorème de J. P. Sydler.

Dans les pages qui suivent, on démontre le résultat:

Pour k un corps algébriquement clos de caractéristique 0

$$(2) \quad \begin{cases} H_1(SL(2, k), \mathfrak{sl}(2, k)) \simeq \Omega_k^1 \\ H_2(SL(2, k), \mathfrak{sl}(2, k)) = 0, \end{cases}$$

où H est l'homologie à coefficients dans l'action adjointe.

On ne sait malheureusement pas obtenir (1) par descente à partir de (2) particularisé à $k = \mathbb{C}$ et on ignore aussi ce qu'il en est de (2), si k n'est pas algébriquement clos.

A la lumière des résultats "infinitésimaux" de [4], on peut conjecturer que

(2) est vrai, plus généralement, pour un groupe algébrique simple sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, sauf pour les types A_n , $n \geq 2$; par contre, il est probable que pour $n \geq 3$, $H_2(\mathrm{SL}(n, k), \mathrm{sl}(n, k)) \neq 0$, si k est de degré de transcendance au moins égale à 2 sur \mathbb{Q} : pour $n \geq 5$ cela résulte de [13].

Le résultat principal de cet article est donc instable; pour l'homologie du groupe linéaire, à coefficients, la stabilité est un peu mieux comprise que dans le cas de SL , à cause de la présence du centre; voir à ce sujet [7] et [8].

Les ingrédients essentiels de la preuve de (2) sont: d'une part une suite exacte voisine d'une suite exacte de B. Jessen [10], qui précise les relations, pour la présentation "multiplicative" des formes de Kähler donnée par la différentielle logarithmique; d'autre part, l'analogue pour l'homologie à coefficients dans l'action adjointe, d'une suite exacte de S. Bloch, J. L. Dupont et C.-H. Sah ([6]).

Est-il besoin de préciser tout ce que les pages ci-après doivent aux articles: [10], [1], [6], et [12]?

Le lecteur intéressé par les questions homologiques posées par le troisième problème de Hilbert, peut consulter l'exposé de P. Cartier, au Séminaire Bourbaki [2], et la bibliographie qui y est incluse. On renvoie aussi au mémoire récent de C.-H. Sah [15].

Cet article a été refondu à la suite d'une lettre de C.-H. Sah [16]; je le remercie chaleureusement de m'avoir permis d'utiliser ses résultats pour la nouvelle version.

1. Une présentation multiplicative des formes de Kähler.

1.1. L'espace \mathcal{B}_k .

Pour k un corps commutatif, on définit \mathcal{B}_k , comme le k -espace vectoriel engendré par les symboles:

$$[a], \quad \text{où } a \in k \setminus \{0, 1\},$$

soumis aux relations:

- (B1) $[a] = [1-a]$,
- (B2) $[1/a] = -(1/a)[a]$,
- (B3) $\forall a, b \in k \setminus \{0, 1\}$, distincts:

$$[a] - [b] + (1-a) \left[\frac{1-b}{1-a} \right] + a \left[\frac{b}{a} \right] = 0,$$

(B4) si k est de caractéristique $p \neq 0, 2$:

$$\sum_{n=2}^{p-1} [n1] = 0.$$

Cet espace vectoriel jouera un rôle central dans toute la suite de l'article. Il est commode de prolonger le symbole $[\cdot]$ à 0 et 1 par :

$$[0] = [1] = 0.$$

Le lemme suivant que je dois à C.-H. Sah simplifie la présentation de \mathcal{B}_k , en particulier dans la situation considérée au paragraphe 2.

LEMMA (C.-H. Sah). *Si k n'est pas de caractéristique 2, alors (B1) et (B2) résultent de (B3). En particulier, en caractéristique nulle, (B3) suffit pour définir \mathcal{B}_k .*

En effet en soustrayant les relations (B3) relatives à : a, b et $1-a, 1-b$, on obtient :

$$[a] - [1-a] = \theta_k,$$

où θ_k est une constante ; permutant $[a]$ et $[1-a]$, cela donne :

$$2\theta_k = 0,$$

d'où (B1).

En prenant $b = 1 - a$ dans (B3), on a :

$$\theta_k + (1-a) \left[\frac{a}{1-a} \right] + a \left[\frac{1-a}{a} \right] = 0;$$

(B2) en résulte, en observant que $c = a/(1-a)$ équivaut à $a = c/(1+c)$ et que (B2) est triviale pour $a = -1$.

REMARQUE. Notons ici que C.-H. Sah a prouvé le fait suivant : si k est de caractéristique $p \neq 0, 2$, (B4) n'est pas conséquence des autres axiomes ; la preuve utilise les vecteurs de Witt. Pour F_3 cela résulte de manière évidente du Théorème 1 ci-après.

On considère de plus le k -espace vectoriel \mathcal{J}_k engendré par les symboles :

$$(a, b), \quad \text{pour } a, b \in k,$$

satisfaisant aux conditions :

$$(J1) \quad (a, b) = (b, a),$$

$$(J2) \quad (ca, cb) = c(a, b),$$

$$(J3) \quad (b, c) - (a+b, c) + (a, b+c) - (a, b) = 0,$$

$$(J4) \quad \text{si } k \text{ est de caractéristique } p \neq 0: \sum_{n=1}^p (1, n1) = 0.$$

\mathcal{B}_k et \mathcal{I}_k sont les facettes non homogène et homogène d'une même entité ; en fait on a :

PROPOSITION 1. *La correspondance entre symboles :*

$$[a] \mapsto (a, 1-a),$$

induit un isomorphisme de k -espaces vectoriels :

$$\varrho : \mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{I}_k.$$

D'abord quelques conséquences de axiomes de définition de \mathcal{I}_k . Si k est de caractéristique $\neq 2$, on a :

$$(a, -a) = 0,$$

ii

par (J1) et (J2); si k est de caractéristique 2, cette relation est encore vraie; en effet, par (J3) appliqué au triplet 1, 1, 0, on a: $(1, 0) = 0$, d'où $(1, 1) = 0$ par (J4) et $(a, a) = 0$ par (J2).

On en déduit en appliquant (J3) au triplet: $a, 1-a, -1$, la relation:

$$(1-a, -1) = (a, 1-a).$$

Si on pose $\varrho([a]) = (a, 1-a)$, ϱ est bien défini comme application k -linéaire de \mathcal{B}_k dans \mathcal{I}_k ; en effet :

$$\varrho([a]) = (a, 1-a) = (1-a, a) = \varrho([1-a]),$$

$$\varrho([1/a]) = \left(\frac{1}{a}, 1-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a}(1-a, -1) = -\frac{1}{a}\varrho([a]),$$

si $a, b \in k \setminus \{0, 1\}$ sont distincts :

$$\begin{aligned} \varrho([a]) - \varrho([b]) + (1-a)\varrho\left(\left[\frac{1-b}{1-a}\right]\right) + a\varrho\left(\left[\frac{b}{a}\right]\right) \\ = (a, 1-a) - (b, 1-b) + (1-b, b-a) + (b, a-b) \\ = (a, 1-a) - (b, 1-b) + (1-b, b-a) - (a, b-a), \end{aligned}$$

car :

$$(b, a-b) = b\left(1, \frac{a}{b} - 1\right) = b\left(\frac{a}{b}, 1 - \frac{a}{b}\right);$$

enfin l'expression ci-dessus est nulle par (J3) appliqué au triplet: $a, b-a, 1-b$.

De plus, si k est de caractéristique $\neq 0$:

$$\begin{aligned}
\varrho\left(\sum_{n=1}^p [n1]\right) &= \sum_{n=1}^p (n1, 1-n1) \\
&= -\sum_{n=1}^p (1, (n-1)1) \\
&= -\sum_{n=1}^p (1, n1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ϱ admet un inverse λ donné sur les symboles par :

$$\lambda((a, b)) = \begin{cases} (a+b) \left[\frac{a}{a+b} \right], & \text{si } a+b \neq 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérifions que λ est bien définie; on a clairement:

$$\lambda((a, b)) = \lambda((b, a))$$

$$\lambda((ca, cb)) = c\lambda((a, b));$$

si $b+c=0$, $a+b+c=0$ ou $a+b=0$,

$$\lambda((b, c)) - \lambda((a+b, c)) + \lambda((a, b+c)) - \lambda((a, b)) = 0,$$

comme conséquence de (B1) et (B2), sinon cette expression est égale à :

$$(b+c) \left[\frac{b}{b+c} \right] - (a+b+c) \left[\frac{a+b}{a+b+c} \right] + (a+b+c) \left[\frac{a}{a+b+c} \right] - (a+b) \left[\frac{a}{a+b} \right],$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$(a+b+c) \left((1-u) \left[\frac{1-u-v}{1-u} \right] - [1-v] + [u] - (1-v) \left[\frac{1-u-v}{1-v} \right] \right),$$

avec :

$$u = \frac{a}{a+b+c}, \quad v = \frac{c}{a+b+c};$$

en utilisant (B1), on obtient pour l'expression entre parenthèses :

$$(1-u) \left[\frac{v}{1-u} \right] - [1-v] + [u] - (1-v) \left[\frac{u}{1-v} \right],$$

qui est nulle dans \mathcal{B}_k , comme conséquence des relations (B2) et (B3).

Notons enfin que si k est de caractéristique $p \neq 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^p \lambda((1, n1)) &= \sum_{n=1}^p (1+n1) \left[\frac{1}{1+n1} \right] \\ &= - \sum_{n=1}^p [1+n1] \\ &= - \sum_{n=1}^p [n1] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme λ et ϱ sont réciproques l'une de l'autre, la proposition est démontrée.

1.2. Une suite exacte associée à la différentielle logarithmique.

Dans toute la suite, k^+ , k^\times sont respectivement les groupes additif et multiplicatif de k . Le produit tensoriel de groupes abéliens :

$$k^\times \otimes k^+,$$

sera noté additivement, il sera considéré comme k -espace vectoriel grâce au second facteur.

On note Ω_k^1 l'espace des formes de Kähler de k sur Z ; on rappelle que c'est le k -espace vectoriel engendré par les symboles:

$$da, \quad a \in k,$$

soumis aux relations :

$$\begin{aligned} d(a+b) &= da+db \\ d(ab) &= adb+bda; \end{aligned}$$

on a les morphismes de groupes abéliens:

$$\begin{aligned} \overline{d}: k^+ &\rightarrow \Omega_k^1 \\ a &\mapsto da \\ d \log: k^\times &\rightarrow \Omega_k^1 \\ a &\mapsto \frac{da}{a}; \end{aligned}$$

on s'intéresse ici à la présentation "multiplicative" des formes de Kähler

donnée par l'application $d \log$:

$$L: k^\times \otimes k^+ \rightarrow \Omega_k^1$$

$$a \otimes b \mapsto b \frac{da}{a}.$$

THEOREME 1. *On a pour un corps k de caractéristique quelconque, une suite exacte de k -espaces vectoriels:*

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_k \xrightarrow{D} k^\times \otimes k^+ \xrightarrow{L} \Omega_k^1 \rightarrow 0.$$

où

$$D([a]) = a \otimes a + (1-a) \otimes (1-a).$$

En particulier, $\mathcal{B}_k = 0$, pour un corps parfait de caractéristique $\neq 0$.

On montre d'abord que la définition de D est compatible avec les relations dans \mathcal{B}_k :

Pour (B2), on a:

$$\begin{aligned} & 1/a \otimes 1/a + (1-1/a) \otimes (1-1/a) \\ &= -1/a(a \otimes 1 + (a-1) \otimes (1-a) - a \otimes (1-a)) \\ &= -1/a(a \otimes a + (1-a) \otimes (1-a)); \end{aligned}$$

noter que dans $k^\times \otimes k^+$, on a:

$$(-a) \otimes b = a \otimes b;$$

pour la relation (B3), on vérifie que:

$$\begin{aligned} & a \otimes a + (1-a) \otimes (1-a) - b \otimes b - (1-b) \otimes (1-b) + \\ & + \frac{1-b}{1-a} \otimes (1-b) + \frac{b-a}{1-a} \otimes (b-a) + \frac{b}{a} \otimes b + \frac{a-b}{a} \otimes (a-b) = 0; \end{aligned}$$

si k est de caractéristique $\neq 0$:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^p (n1 \otimes n1 + (1-n)1 \otimes (1-n)1) \\ &= \sum_{n=1}^p (n1 \otimes n1 - (n-1)1 \otimes (n-1)1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a clairement $L \circ D = 0$, puisque:

$$L \circ D([a]) = da + d(1-a).$$

Prouvons que $\text{Ker } L$ est engendré par les :

$$a \otimes a + (1-a) \otimes (1-a);$$

pour cela il suffit de montrer que $\text{Ker } L$ est engendré par les :

$$a \otimes a + b \otimes b - (a+b) \otimes (a+b),$$

puisque :

$$\begin{aligned} & a \otimes a + b \otimes b - (a+b) \otimes (a+b) \\ &= (a+b) \left(\frac{a}{a+b} \otimes \frac{a}{a+b} + \left(1 - \frac{a}{a+b}\right) \otimes \left(1 - \frac{a}{a+b}\right) \right); \end{aligned}$$

soit alors $E \subset k^\times \otimes k^+$ le sous-espace engendré par ces derniers éléments; on a un diagramme:

$$\begin{array}{ccc} k^\times \otimes k^+ & \xrightarrow{L} & \Omega_k^1 \\ & \searrow & \nearrow \varphi \\ & (k^\times \otimes k^+)/E & \end{array}$$

mais φ a un inverse bien défini par:

$$dx \mapsto x \otimes x,$$

comme on le vérifie immédiatement sur les relations de définition de Ω_k^1 , par suite :

$$\text{Ker } L = E.$$

Il reste à voir que D est injective. Soit :

$$G: k \times k \rightarrow \mathcal{B}_k,$$

l'application définie par:

$$G(a, b) = \begin{cases} (a+b) \left[\frac{a}{a+b} \right], & \text{si } a+b \neq 0 \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

par la Proposition 1, G vérifie :

$$G(a, b) = G(a, b)$$

$$G(ca, cb) = cG(a, b)$$

$$G(b, c) - G(a+b, c) + G(a, b+c) - G(a, b) = 0$$

$$\sum_{n=1}^p G(1, n1) = 0 \quad (\text{si } \text{car } k = p \neq 0);$$

un argument connu d'algèbre homologique (cf. [11, Théorème 2]) permet alors d'affirmer qu'il existe une application :

$$g: k \rightarrow \mathcal{B}_k,$$

telle que :

- i) $g(ab) = g(a) + g(b)$, pour $a, b \neq 0$.
- ii) $G(a, b) = ag(a) + bg(b) - (a + b)g(a + b)$;

en particulier :

$$g(1) = 0$$

$$ag(a) + (1-a)g(1-a) = [a];$$

grâce à i), on a une application linéaire:

$$\tilde{g}: k^\times \otimes k^+ \rightarrow \mathcal{B}_k$$

$$a \otimes 1 \mapsto g(a);$$

et \tilde{g} est une rétraction de D , puisque :

$$\begin{aligned} \tilde{g} \circ D([a]) &= \tilde{g}(a \otimes a + (1-a) \otimes (1-a)) \\ &= ag(a) + (1-a)g(1-a) \\ &= [a], \end{aligned}$$

d'où le théorème.

Désormais, on appellera la suite exacte du Théorème 1, suite exacte de $d \log$; comme on le verra par la suite, elle a le don d'ubiquité.

Notons les conséquences simples suivantes *en caractéristique nulle* du Théorème 1 :

Si $k \subset L$ est une extension de corps, l'application naturelle :

$$\mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{B}_L$$

est injective.

Si k est une extension algébrique de \mathbb{Q} :

$$\mathcal{B}_k \xrightarrow{\sim} k^\times \otimes k^+.$$

Si $(a_i)_{i \in I}$ est formée d'éléments de k algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} , alors $([a_i])_{i \in I}$ est une partie libre de \mathcal{B}_k ; il suffit de prouver que :

$$(a_i \otimes a_i + (1-a_i) \otimes (1-a_i))_{i \in I},$$

est une partie libre de $k^\times \otimes k^+$. On peut supposer k algébriquement clos

et remarquer que :

$$k^\times \otimes k^+ = (k^\times / \mu_k) \otimes_{\mathbb{Q}} k^+.$$

où μ_k est le groupe des racines de l'unité de k : (k^\times / μ_k) est uniquement divisible et donc un \mathbb{Q} -espace vectoriel ; il suffit alors d'observer que :

$$\{a_i\} \cup \{1 - a_i\}$$

est une partie libre de k^\times / μ_k .

On voit donc que $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension la puissance du continu.

1.3. Rapport de \mathcal{B} . avec un foncteur de J. L. Dupont et C.-H. Sah.

Soit A un anneau unitaire, on définit \mathcal{P}_A (cf. [6]), comme le groupe abélien engendré par les :

$$\{z\}, \quad \text{où } z \text{ et } 1 - z \text{ sont des inversibles de } A.$$

soumis aux relations :

$$(D1) \quad \{z\} + \{z^{-1}\} = 0,$$

$$(D2) \quad \{z^{-1}\} - \{1 - z\} = 0,$$

$$(D3) \quad \{z_1\} - \{z_2\} + \{z_2/z_1\} - \{(1 - z_2)/(1 - z_1)\} + \{(1 - z_2)z_1/(1 - z_1)z_2\} = 0$$

pour les couples z_1, z_2 tels que tous les éléments y qui interviennent entre $\{\cdot\}$ sont tels que y et $1 - y$ soient inversibles.

$A \rightarrow \mathcal{P}_A$ est un foncteur covariant de la catégorie des anneaux unitaires dans celle des groupes abéliens, de foncteur tangent :

$$\tilde{T}\mathcal{P}(A) = \text{Ker}(\mathcal{P}_{A[\varepsilon]} \rightarrow \mathcal{P}_A);$$

où $A[\varepsilon]$ est l'anneau des nombres duaux associé à A :

$$A[\varepsilon] = A[X]/(X^2),$$

et $A[\varepsilon] \rightarrow A$, provient de $\varepsilon \mapsto 0$.

On suppose dans la suite du paragraphe que $A = k$ est un corps de caractéristique 0. On a une suite exacte scindée :

$$0 \rightarrow \tilde{T}\mathcal{P}(k) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{P}_{k[\varepsilon]} \rightarrow \mathcal{P}_k \rightarrow 0,$$

qui montre que $\tilde{T}\mathcal{P}(k)$ est engendré par les :

$$\sigma(\{a + b\varepsilon\}) = \{a + b\varepsilon\} - \{a\},$$

où $a \neq 0, 1$.

k^\times opère dans $\tilde{T}\mathcal{P}(k)$ par :

$$c \cdot (\{a + b\varepsilon\} - \{a\}) = \{a + cb\varepsilon\} - \{a\},$$

mais $\tilde{T}\mathcal{P}(k)$ n'est pas en général un espace vectoriel pour cette action, en effet, on montre qu'il existe un morphisme de groupes abéliens :

$$\mu: \tilde{T}\mathcal{P}(k) \rightarrow k^+ \Lambda_{\mathbb{Z}} k^+,$$

tel que :

$$\mu(\{a + b\varepsilon\} - \{a\}) = \frac{b}{a} \wedge \frac{b}{1-a};$$

or on peut trouver des situations où :

$$\mu(\{a + 2b\varepsilon\} + \{a\} - 2\{a + b\varepsilon\}) = 2 \left(\frac{b}{a} \wedge \frac{b}{1-a} \right)$$

est non nul dans $k^+ \Lambda_{\mathbb{Z}} k^+$.

On décide de rendre additive l'action de k^\times dans $\tilde{T}\mathcal{P}(k)$, en posant :

$$T\mathcal{P}(k) = \tilde{T}\mathcal{P}(k)/N_k,$$

où N_k est le sous-groupe de $\tilde{T}\mathcal{P}(k)$ engendré par les éléments :

$$\{a + (b + b')\varepsilon\} + \{a\} - \{a + b\varepsilon\} - \{a + b'\varepsilon\}$$

PROPOSITION 2. Soit k , de caractéristique 0, on a un isomorphisme de k -espaces vectoriels :

$$\varphi: \mathcal{B}_k \rightarrow T\mathcal{P}(k),$$

caractérisé par :

$$\varphi([a]) = \{a + a(1-a)\varepsilon\} - \{a\}.$$

φ est bien définie; comme on est en caractéristique 0, il suffit de vérifier la compatibilité de φ avec (B3); on va utiliser (D3); pour cela, on remarque que si :

$$u = a + a(1-a)\varepsilon \quad \text{et} \quad v = b + b(1-b)\varepsilon,$$

on a dans $k[\varepsilon]$, la relation ;

$$\frac{u(1-v)}{v(1-u)} = \frac{a(1-b)}{b(1-a)}$$

qui entraîne :

$$\begin{aligned} &\varphi([a]) - \varphi([b]) + (1-a)\varphi\left(\left[\frac{1-b}{1-a}\right]\right) + a\varphi\left(\left[\frac{b}{a}\right]\right) \\ &= \sigma(\{u\} - \{v\}) + \left\{\frac{v}{u}\right\} - \left\{\frac{1-v}{1-u}\right\} + \left\{\frac{u(1-v)}{v(1-u)}\right\} \end{aligned}$$

(où σ est la section considérée ci-dessus).

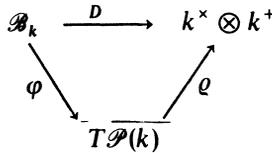
Pour prouver l'injectivité de φ , on montre d'abord qu'il existe un morphisme de k -espaces vectoriels :

$$\varrho: T\mathcal{P}(k) \rightarrow k^\times \otimes k^+,$$

tel que :

$$\varrho(\{a + b\varepsilon\} - \{a\}) = a \otimes \frac{b}{1-a} + (1-a) \otimes \frac{b}{a};$$

on a alors un diagramme commutatif :



et comme D est injective, il en est de même de φ .

1.4. *Rapport de la suite exacte de $d \log$ avec une suite exacte de B. Jessen.* (Voir aussi le paragraphe 3.)

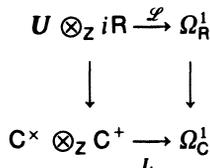
Rappelons la suite de B. Jessen ([10], [3]):

$$0 \rightarrow \mathcal{P}/\mathcal{L} \xrightarrow{\mathcal{D}} U \otimes_{\mathbb{Z}} i\mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Omega_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow 0,$$

où \mathcal{P}/\mathcal{L} est la \mathbb{R} -espace vectoriel des polyèdres de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , modulo les prismes, \mathcal{D} est l'invariant de Dehn, U est le groupe multiplicatif des complexes de module 1 et \mathcal{L} est donné par :

$$e^{i\theta} \otimes ix \mapsto -x \frac{d \sin \theta}{\cos \theta};$$

on observe que l'on a un diagramme commutatif :



où les flèches verticales sont les injections canoniques; en effet de la relation :

$$\cos \theta d \cos \theta + \sin \theta d \sin \theta = 0,$$

résulte :

$$\begin{aligned} \frac{de^{i\theta}}{e^{i\theta}} &= (\cos \theta - i \sin \theta)(d \cos \theta + id \sin \theta) \\ &= i \frac{d \sin \theta}{\cos \theta} \end{aligned}$$

on en déduit un plongement de la suite de Jessen dans la suite de $d \log$ relative à $k = \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{P}/\mathcal{L} & \xrightarrow{\mathcal{D}} & \mathbf{U} \otimes_{\mathbb{Z}} i\mathbb{R} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \Omega_{\mathbb{R}}^1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \nabla & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{D} & \mathbb{C}^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^+ & \xrightarrow{L} & \Omega_{\mathbb{C}}^1 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Il est possible d'expliciter l'application ∇ sur une famille de tétraèdres de \mathbb{R}^3 qui engendre \mathcal{P}/\mathcal{L} : on renvoie à [17] et [10] pour ces tétraèdres, notés $T(a, b)$, qui jouent un rôle fondamental dans la preuve du théorème de Sydler. Rappelons que $T(a, b)$ est déterminé par deux nombres $a, b \in]0, 1[$ et que si $\alpha, \beta, \alpha * \beta$ sont les angles de $]0, \pi/2[$ tels que :

$$\sin^2 \alpha = a, \quad \sin^2 \beta = b \quad \text{et} \quad \sin^2 \alpha * \beta = ab,$$

l'invariant de Dehn de $T(a, b)$ s'écrit :

$$\mathcal{D}(T(a, b)) = e^{i\alpha} \otimes i \cotg \alpha + e^{i\beta} \otimes i \cotg \beta - e^{i\alpha * \beta} \otimes i \cotg(\alpha * \beta);$$

en utilisant une rétraction \tilde{g} de D comme celle construite dans la preuve du Théorème 1, on a :

$$\begin{aligned} \nabla(T(a, b)) &= \tilde{g}(\mathcal{D}(T(a, b))) \\ &= i \cotg \alpha g(e^{i\alpha}) + i \cotg \beta g(e^{i\beta}) - i \cotg(\alpha * \beta) g(e^{i\alpha * \beta}); \end{aligned}$$

nous allons voir qu'il est possible d'éliminer g de cette expression; on peut écrire en utilisant les relations :

- i) $g(ab) = g(a) + g(b)$
- ii) $ag(a) + bg(b) - (a + b)g(a + b) = (a + b) \left[\frac{a}{a + b} \right],$

$$g(e^{i\theta}) = - \left[\frac{\cos \theta}{e^{i\theta}} \right] + \frac{\cos \theta}{e^{i\theta}} g(\cos \theta) + \frac{i \sin \theta}{e^{i\theta}} g(i \sin \theta),$$

$$g(\cos \theta) = \frac{1}{2}([\sin^2 \theta] - \operatorname{tg}^2 \theta g(\sin^2 \theta)),$$

$$g(i \sin \theta) = \frac{1}{2}g(\sin^2 \theta),$$

soit :

$$g(e^{i\theta}) = - \left[\frac{\cos \theta}{e^{i\theta}} \right] + \frac{\cos \theta}{e^{i\theta}} [\sin^2 \theta] + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \theta}{e^{i\theta}} (-\operatorname{tg} \theta + i) \right) g(\sin^2 \theta);$$

en reportant cette expression, pour $\theta = \alpha, \beta, \alpha * \beta$, dans $\nabla(T(a, b))$, on obtient finalement grâce à la relation i) :

$$\nabla(T(a, b)) = W(\alpha) + W(\beta) - W(\alpha * \beta),$$

où :

$$W(\theta) = i \operatorname{cotg} \theta \left(- \left[\frac{\cos \theta}{e^{i\theta}} \right] + \frac{\cos \theta}{e^{i\theta}} [\sin^2 \theta] \right);$$

il serait intéressant d'avoir une expression explicite de ∇ sur un polyèdre quelconque, en fonction des angles dièdres et des longueurs des arêtes.

$Z/2Z$ opère dans la suite de $d \log$ relative à \mathbb{C} , grâce aux involutions :

$$\begin{aligned} \tau(z[z']) &= \bar{z}[\bar{z}'], \\ z \otimes z' &\mapsto \bar{z} \otimes \bar{z}' \\ zdz' &\mapsto \bar{z}d\bar{z}'; \end{aligned}$$

d'où une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^{\tau} \xrightarrow{D} (U \otimes_{\mathbb{Z}} i\mathbb{R}) \oplus (\mathbb{R}^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}^+) \xrightarrow{L} \Omega_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow 0;$$

on a un diagramme commutatif et exact :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{P}/\mathcal{L} \oplus & \xrightarrow{\mathcal{D}+D} & F & \xrightarrow{L} & \Omega_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^{\tau} & \rightarrow & (U \otimes_{\mathbb{Z}} i\mathbb{R}) \oplus (\mathbb{R}^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}^+) & \xrightarrow{L} & \Omega_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow 0 \end{array}$$

où

$$F = \operatorname{Ker}((U \otimes i\mathbb{R}) \oplus (\mathbb{R}^{\times} \otimes \mathbb{R}^+) \xrightarrow{L} \Omega_{\mathbb{R}}^1),$$

avec $L(u \oplus v) = L(u) - L(v)$; on en déduit facilement des suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{P}/\mathcal{L} & \rightarrow & \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^{\tau} & \rightarrow & \mathbb{R}^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}^+ \rightarrow 0 \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{B}_{\mathbb{R}} & \rightarrow & \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^{\tau} & \rightarrow & U \otimes_{\mathbb{Z}} i\mathbb{R} \rightarrow 0 \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{P}/\mathcal{L} \oplus \mathcal{B}_{\mathbb{R}} & \rightarrow & \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^{\tau} & \rightarrow & \Omega_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow 0 \end{array}$$

on laisse en exercice les faits suivants sur \mathcal{B}_R et \mathcal{B}_C :

La fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \log |x| + (1-x) \log |1-x|, \end{aligned}$$

montre que, pour $x \neq 0, 1$, $[x]$ est non nul dans \mathcal{B}_R ; par contre, dans \mathcal{B}_C , on a :

$$\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right] = \left[\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right] = 0;$$

l'application :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} &\rightarrow \mathbb{C}^+ \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^+ \\ z &\mapsto \left(\frac{1}{2i\pi} \log z \right) \otimes z-1 \otimes \frac{1}{2i\pi} \int_0^z \log t dt, \end{aligned}$$

a un sens, indépendant des déterminations du logarithme (voir [1] et [6], pour une situation analogue liée au dilogarithme); on en déduit un triangle commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_C & \xrightarrow{D} & \mathbb{C}^+ \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^+ \\ \tilde{D} \searrow & & \nearrow \exp 2i\pi \cdot \otimes \text{id} \\ & & \mathbb{C}^+ \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^+ \end{array}$$

où

$$\tilde{D}([z]) = \phi(z) + \phi(1-z).$$

1.4. Rapport de \mathcal{B}_k avec l'homologie du groupe affine de la droite A_k^1 .

Après diffusion de la première version de cet article, C.-H. Sah ([16]) a observé que \mathcal{B}_k était relié à l'homologie du groupe affine.

Plus précisément, supposons $GA(1, k)$ identifié au groupe des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in k, a \neq 0,$$

opérant à gauche dans A_k^1 identifié aux vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$; on considère

la représentation de $GA(1, k)$ dans k , notée ρ_k , donnée par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot c = ca^{-1}.$$

PROPOSITION (C.-H. Sah). *Si k est de caractéristique nulle :*

$$H_2(\text{GA}(1, k), {}_l k) = \mathcal{B}_k.$$

Dans le paragraphe 2.4., on relie cette observation au reste de l'article en utilisant le fait que $\text{GA}(1, k)$ s'identifie aux sous-groupes de Borel de $\text{PGL}(2, k)$.

Esquissons la preuve de la proposition; soit C_n le groupe abélien libre engendré par les $\{(a_0, a_1, \dots, a_n) \in (\mathbf{A}_k^1)^{n+1}, a_i \neq a_j\}$; on a la complexe acyclique (noter que k est infini):

$$\dots \rightarrow C_2 \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0;$$

en posant $A_n = C_n \otimes_{\mathbf{Z}} {}_l k$, on obtient un complexe acyclique de $\text{GA}(1, k)$ -modules :

$$\dots \rightarrow A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow A_0 \rightarrow {}_l k \rightarrow 0;$$

à ce stade, on peut utiliser la suite spectrale "transposée", pour relier les homologies.

$$H_i(\text{GA}, {}_l k) \quad \text{et} \quad H_i(\text{GA}, A_0);$$

on peut aussi procéder plus élémentairement de la manière suivante (ce point de vue sera utilisé en 2.4); considérons les suites exactes :

$$0 \rightarrow W_0 \rightarrow A_0 \rightarrow {}_l k \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow W_1 \rightarrow A_1 \rightarrow W_0 \rightarrow 0$$

le lemme de Schapiro et l'argument du "Center kills", montrent que :

$$H_i(\text{GA}, A_0) = H_i(k^\times, {}_l k) = 0, \quad \text{pour } i \geq 0;$$

$$H_i(\text{GA}, A_1) = 0, \quad \text{pour } i > 0;$$

de telle sorte que, pour $i \geq 2$;

$$H_i(\text{GA}, {}_l k) = H_{i-1}(\text{GA}, W_0) = H_{i-2}(\text{GA}, W_1);$$

de plus, comme $\text{GA}(1, k)$ est exactement 2-transitif dans \mathbf{A}_k^1 ,

$$\dots A_3 \rightarrow A_2 \xrightarrow{\partial} W_1 \rightarrow 0.$$

est une résolution GA-libre de W_1 et par suite :

$$H_2(\text{GA}, {}_l k) = H_0(\text{GA}, W_1) = (A_2)_{\text{GA}} / \partial((A_3)_{\text{GA}}).$$

On vérifie que ce dernier espace s'identifie en fait à \mathcal{B}_k en envoyant $(0, 1, a)$ sur $[a]$, la relation (B3) étant fournie par $\text{Im } \partial$.

REMARQUE. Il résulte aussi facilement de ce qui précède que : $H_1(\text{GA}, {}_l k) = k$; cela sera utilisé en 2.4.

2. Application de la suite de $d\log a$ l'homologie de $SL(2, k)$ a coefficients dans l'action adjointe.

Dans tout ce paragraphe, on suppose que k est un corps de caractéristique $\neq 2$, tel que tout élément de k est un carré.

On sait que sous ces hypothèses, on a :

$$PGL(2, k) = PSL(2, k),$$

où P désigne les groupes projectifs.

On notera :

$$G = PGL(2, k) = PSL(2, k), \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{sl}(2, k),$$

où $\mathfrak{sl}(2, k)$ est l'algèbre de Lie du groupe algébrique $PSL(2, k)$, constituée des matrices de trace nulle.

G opère dans \mathfrak{G} par conjugaison et dans la droite projective $P_1(k)$ par les homographies.

Si $a \in P_1(k)$, $B_a \subset G$ est le sous-groupe de Borel, stabilisateur de a pour l'action de G dans $P_1(k)$; on notera \mathfrak{B}_a , la sous-algèbre de Lie correspondante.

2.1. Une suite exacte de G -modules.

On considère la suite de k -espaces vectoriels :

$$(3) \quad \coprod_{\substack{a, b \in P_1(k) \\ a \neq b}} \mathfrak{B}_a \cap \mathfrak{B}_b \xrightarrow{\partial} \coprod_{a \in P_1(k)} \mathfrak{B}_a \xrightarrow{\omega} \mathfrak{G} \rightarrow 0$$

où \coprod est la somme directe et :

$$\partial(u|a, b|) = u|b| - u|a|, \quad \omega(u|a|) = u,$$

$u|a, b|$ désignent un élément de $\mathfrak{B}_a \cap \mathfrak{B}_b$, et $u|a|$ un élément de \mathfrak{B}_a .

G opère dans la suite (3), grâce à l'action adjointe et à l'action dans $P_1(k)$.

PROPOSITION 3. *Si k est un corps de caractéristique $\neq 2$, où tout élément est un carré, la suite (3) est une suite exacte de G -modules.*

Soit :

$$t = \sum_{i=1}^n u_i |a_i|,$$

où $u_i \in \mathfrak{B}_{a_i}$, un élément de $\coprod_{a \in P_1(k)} \mathfrak{B}_a$; si les u_i sont $\neq 0$ et les a_i distincts, n est appelée la longueur de t .

Si t est de longueur 2, il est clair que $\omega(t) = 0$ entraîne $t \in \text{Im } \partial$.

Examinons le cas de longueur 3, soit $t = u_1|a_1| + u_2|a_2| + u_3|a_3|$, avec $u_1 + u_2 + u_3 = 0$; comme a_1, a_2, a_3 sont distincts, $\mathfrak{B}_{a_1} \cap \mathfrak{B}_{a_2}$ est supplémentaire de \mathfrak{B}_{a_3} dans \mathfrak{G} ; soit p la projection de \mathfrak{G} sur $\mathfrak{B}_{a_1} \cap \mathfrak{B}_{a_2}$ parallèlement à \mathfrak{B}_{a_3} et posons:

$$v = p(u_1);$$

on a:

$$v \in \mathfrak{B}_{a_1} \cap \mathfrak{B}_{a_2}, \quad u_1 - v \in \mathfrak{B}_{a_3} \quad \text{et} \quad u_2 + v \in \mathfrak{B}_{a_3},$$

puisque:

$$p(u_2 + v) = p(v - u_1 - u_3) = 0;$$

par suite:

$$\begin{aligned} t &= v|a_1| - v|a_2| + (u_1 - v)|a_1| + (u_2 + v)|a_2| - (u_1 - v)|a_3| - (u_2 + v)|a_3| \\ &= \partial(v|a_2, a_1| + (u_1 - v)|a_3, a_1| + (u_2 + v)|a_3, a_2|). \end{aligned}$$

On raisonne ensuite par récurrence sur la longueur de t ; soit pour $n > 3$

$$t = \sum_{i=1}^n u_i|a_i|, \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n u_i = 0;$$

les hypothèses faites sur le corps k entraîne que tout élément de \mathfrak{G} est conjugué à une matrice triangulaire supérieure ou encore que:

$$\mathfrak{G} = \bigcup_{a \in P_1(k)} \mathfrak{B}_a;$$

par suite, il existe $a_0 \in P_1(k)$ tel que:

$$u_1 + u_2 \in \mathfrak{B}_{a_0},$$

et on peut écrire:

$$t = (u_1|a_1| + u_2|a_2| - (u_1 + u_2)|a_0|) + ((u_1 + u_2)|a_0| + \sum_{i=3}^n u_i|a_i|),$$

ce qui montre que t est la somme de deux éléments de $\text{Ker } \omega$ de longueur $< n$.

Dans la suite, on notera E_0 et E_1 , les G -modules:

$$E_0 = \text{Im } \partial = \text{Ker } \omega, \quad E_1 = \text{Ker } \partial.$$

2.2. \mathfrak{B}_k et l'espace des coinvariants de E_1 pour l'action de G .

Soit :

$$h = \sum_{i=1}^q u_i |a_i, b_i|,$$

un élément de E_1 , où les u_i sont $\neq 0$ et les couples (a_i, b_i) sont distincts ; on appelle longueur de h , l'entier :

$$\# \{a_i, b_i : i = 1, \dots, q\}.$$

PROPOSITION 4. E_1 est engendré, comme groupe abélien, par ses éléments de longueur deux et quatre.

Les éléments de longueur deux sont de la forme :

$$u |a, b| + u |b, a|,$$

nous les appellerons doublets.

On vérifie que, comme k est de caractéristique $\neq 2$, tout élément de longueur trois est somme de doublets.

Modulo des doublets, un élément de longueur quatre se met sous la forme :

$$u_{12} |a_1, a_2| + u_{13} |a_1, a_3| + u_{14} |a_1, a_4| + u_{23} |a_2, a_3| + u_{24} |a_2, a_4| + u_{34} |a_3, a_4| ;$$

un tel élément de longueur quatre sera appelé quadruplet de sommets a_1, a_2, a_3, a_4 .

LEMME 1. Les quadruplets de E_1 de sommets a_1, a_2, a_3, a_4 donnés, constituent un sous-espace vectoriel de E_1 de dimension 1.

En particulier un quadruplet $(u_{ij})_{1 \leq i < j \leq 4}$ est entièrement déterminé par l'un des u_{ij} .

Remarquons que les quadruplets $(u_{ij})_{1 \leq i < j \leq 4}$ de sommet a_1, a_2, a_3, a_4 , sont exactement les solutions du système :

$$\begin{cases} u_{12} + u_{13} + u_{14} = 0 \\ u_{12} - u_{23} - u_{24} = 0 \\ u_{13} + u_{23} - u_{34} = 0 \\ u_{14} + u_{24} + u_{34} = 0 \end{cases} \text{ avec } u_{ij} \in \mathfrak{B}_{a_i} \cap \mathfrak{B}_{a_j}$$

le lemme s'en déduit, en utilisant le fait que, comme a_1, a_2, a_3, a_4 sont distincts, les quatre plans vectoriels de \mathfrak{G} : $\mathfrak{B}_{a_1}, \mathfrak{B}_{a_2}, \mathfrak{B}_{a_3}, \mathfrak{B}_{a_4}$, sont en position générale.

Soit maintenant $h \in E_1$ de longueur $n \geq 5$ et $a_0 \in \mathcal{P}_1(k)$ intervenant dans son écriture ; modulo des doublets, on peut supposer que les couples où a_0 apparaît, dans l'écriture de h , sont :

$$(a_0, a_1), \dots, (a_0, a_q), \quad q \geq 3,$$

avec des coefficients :

$$u_{01}, \dots, u_{0q}.$$

Si $q > 3$, par le lemme, il existe un unique quadruplet de la forme :

$$t = v_{01}|a_0, a_1| + v_{02}|a_0, a_2| + u_{0q}|a_0, a_q| + v_{12}|a_1, a_2| + v_{1q}|a_1, a_q| + v_{2q}|a_2, a_q|;$$

dans $h-t$, a_0 n'apparaît que dans les couples :

$$(a_0, a_1), \dots, (a_0, a_{q-1});$$

donc on peut supposer que $q = 3$; alors toujours d'après le lemme, il existe un unique quadruplet de la forme :

$$\text{ii } t' = u_{01}|a_0, a_1| + u_{02}|a_0, a_2| + u_{03}|a_0, a_3| + v'_{12}|a_1, a_2| + v'_{13}|a_1, a_3| + v'_{23}|a_2, a_3|,$$

et $h-t'$ est de longueur $< n$, d'où la proposition.

Pour les calculs ultérieurs, notons que les éléments de \mathfrak{B}_∞ , \mathfrak{B}_0 , \mathfrak{B}_a ($a \in k \setminus \{0\}$), sont respectivement de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & -\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \frac{2\lambda a + \mu}{a^2} & -\lambda \end{pmatrix},$$

où $\lambda, \mu \in k$.

Soit $a \in k \setminus \{0, 1\}$, un calcul élémentaire d'algèbre linéaire, montre que les quadruplets de E_1 de sommets : $\infty, 0, 1, a$, sont les multiples de l'élément :

$$\begin{aligned} Q_a &= \begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} | \infty, 0 | + \begin{pmatrix} a & -2a \\ 0 & -a \end{pmatrix} | \infty, 1 | + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} | 0, 1 | + \\ &+ \begin{pmatrix} -1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | \infty, a | + \begin{pmatrix} -a & 0 \\ -2 & a \end{pmatrix} | 0, a | + \begin{pmatrix} 1+a & -2a \\ 2 & -(1+a) \end{pmatrix} | 1, a |. \end{aligned}$$

On rappelle que $G = \text{PSL}(2, k)$ opère simplement transitivement dans l'ensemble des triplets de points distincts de $P_1(k)$; et que les orbites de G dans :

$$\{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_i \in k \cup \{\infty\}, a_i \neq a_j \text{ pour } i \neq j\}$$

sont paramétrées par le birapport, défini par :

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] = \frac{a_1 - a_3}{a_1 - a_4} \cdot \frac{a_2 - a_4}{a_2 - a_3};$$

en particulier pour $a \in k \setminus \{0, 1\}$:

$$[\infty, 0, 1, a] = a.$$

Soit $a_1, a_2, a_3, a_4 \in k \cup \{\infty\}$, distincts, on définit un quadruplet $Q(a_1, a_2, a_3, a_4)$ de sommets a_1, a_2, a_3, a_4 , en posant :

$$Q(a_1, a_2, a_3, a_4) = g \cdot Q_a,$$

où :

$$a = [a_1, a_2, a_3, a_4]$$

et $g \in G$ est l'unique élément vérifiant :

$$g(\infty) = a_1, \quad g(0) = a_2, \quad g(1) = a_3 ;$$

en particulier, on a :

$$Q_a = Q(\infty, 0, 1, a).$$

Soit $(E_1)_G = H_0(G, E_1)$, l'espace des coinvariants du G -module E_1 , si $a \in k \setminus \{0, 1\}$, on note $\langle a \rangle$ la classe du quadruplet Q_a dans $(E_1)_G$.

PROPOSITION 5. $(E_1)_G$ est engendré comme k -espace vectoriel par les :

$$\langle a \rangle, \quad a \in k \setminus \{0, 1\};$$

de plus ces éléments vérifient dans $(E_1)_G$ la relation :

$$\forall a, b \in k \setminus \{0, 1\}, \quad \text{avec } a \neq b :$$

$$\langle a \rangle - \langle b \rangle + (1-a) \left\langle \frac{1-b}{1-a} \right\rangle + a \left\langle \frac{b}{a} \right\rangle = 0.$$

D'où, en caractéristique 0, une surjection linéaire :

$$\mathcal{B}_k \rightarrow (E_1)_G$$

$$[a] \mapsto \langle a \rangle.$$

On verra plus tard que cette application est en fait un isomorphisme.

Pour la preuve de la proposition, on observe d'abord que les doublets sont nuls dans $(E_1)_G$. A cause de l'action de G , on peut se limiter à considérer les doublets :

$$t = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} | \infty, 0 | + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} | 0, \infty | ;$$

si g est l'élément du groupe de Weyl relatif à $\infty, 0$, de représentant dans $GL(2, k)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

qui échange 0 et ∞ , on a :

$$g \cdot t = -t$$

et par suite la classe de t est 0 dans $(E_1)_G$.

Et maintenant comme les quadruplets :

$$Q(a_1, a_2, a_3, a_4) \text{ et } Q_{[a_1, a_2, a_3, a_4]}$$

donnent les mêmes éléments dans $(E_1)_G$, il résulte de la Proposition 4 que $(E_1)_G$ est engendré par les $\langle a \rangle$, $a \in k \setminus \{0, 1\}$.

Quant à la relation, on va la déduire du fait que la somme :

$$(4) \quad Q(\infty, 0, 1, a) - Q(\infty, 0, 1, b) + (1-a)Q(\infty, 1, a, b) + aQ(\infty, 0, a, b),$$

est nulle dans E_1 . Par définition de $Q(a_1, a_2, a_3, a_4)$, cette somme a même classes dans $(E_1)_G$ que :

$$Q_a - Q_b + (1-a)Q_{((1-b)/(1-a))} + aQ_{(b/a)},$$

à cause des calculs de birapports suivants :

$$[\infty, 0, 1, a] = a$$

$$[\infty, 0, 1, b] = b$$

$$[\infty, 1, a, b] = \frac{1-b}{1-a}$$

$$[\infty, 0, a, b] = \frac{b}{a};$$

calculons $Q(\infty, 1, a, b)$ et $Q(\infty, 0, a, b)$; on a :

$$Q(\infty, 1, a, b) = g_1 \cdot Q_{((1-b)/(1-a))},$$

où :

$$g_1(\infty) = \infty, \quad g_1(0) = 1, \quad g_1(1) = a$$

g_1 est représenté par :

$$\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient:

$$(a - 1)Q(\infty, 1, a, b) =$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a-b & 2(b-a) \\ 0 & b-a \end{pmatrix} |_{\infty, 1} + \begin{pmatrix} b-1 & -2a(b-1) \\ 0 & 1-b \end{pmatrix} |_{\infty, a} + \begin{pmatrix} a+1 & -2a \\ 2 & -(a+1) \end{pmatrix} |_{1, a} + \\ & + \begin{pmatrix} 1-a & 2b(a-1) \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} |_{\infty, b} + \begin{pmatrix} -(b+1) & 2b \\ -2 & b+1 \end{pmatrix} |_{1, b} + \begin{pmatrix} a+b & -2ab \\ 0 & -(a+b) \end{pmatrix} |_{a, b}; \end{aligned}$$

de façon analogue :

$$Q(\infty, 0, a, b) = g_2 \cdot Q_{(b/a)},$$

où :

$$g_2(\infty) = \infty, \quad g_2(0) = 0, \quad g_2(1) = a;$$

g_2 est représenté par : $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; on obtient :

$$aQ(\infty, 0, a, b) =$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} |_{\infty, 0} + \begin{pmatrix} b & -2ab \\ 0 & -b \end{pmatrix} |_{\infty, a} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & -a \end{pmatrix} |_{0, a} + \\ & + \begin{pmatrix} -a & 2ab \\ 0 & a \end{pmatrix} |_{\infty, b} + \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 2 & b \end{pmatrix} |_{0, b} + \begin{pmatrix} a+b & -2ab \\ 2 & -(a+b) \end{pmatrix} |_{a, b}. \end{aligned}$$

On vérifie alors, sans difficulté, que la somme (4) est nulle, d'où la proposition.

2.3. L'analogie d'une suite exacte de Bloch-Dupont-Sah.

On suppose désormais que k est un corps de caractéristique 0, où tout élément est un carré.

On pose :

$$\begin{aligned} B &= B_{\infty} \quad , \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{\infty} \\ T &= B_{\infty} \cap B_0, \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{B}_{\infty} \cap \mathfrak{B}_0; \end{aligned}$$

en utilisant le lemme classique de Shapiro sur les modules induits, on obtient à partir des deux suites exactes de G -modules :

$$0 \rightarrow E_0 \rightarrow \coprod_{a \in \mathcal{P}_1(k)} \mathfrak{B}_a \rightarrow \mathfrak{G} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow E_1 \rightarrow \coprod_{\substack{a, b \in \mathcal{P}_1(k) \\ a \neq b}} \mathfrak{B}_a \cap \mathfrak{B}_b \rightarrow E_0 \rightarrow 0.$$

Les suites exactes suivantes en homologie :

$$(5) \quad H_2(B, \mathfrak{B}) \rightarrow H_2(G, \mathfrak{G}) \rightarrow H_1(G, E_0) \rightarrow H_1(B, \mathfrak{B}) \rightarrow \cdots \\ \rightarrow H_1(G, \mathfrak{G}) \rightarrow H_0(G, E_0) \xrightarrow{\lambda} H_0(B, \mathfrak{B}) \rightarrow 0,$$

$$(6) \quad H_1(T, \mathfrak{T}) \rightarrow H_1(G, E_0) \xrightarrow{\nu} H_0(G, E_1) \rightarrow H_0(T, \mathfrak{T}) \xrightarrow{\mu} H_0(G, E_0) \rightarrow 0.$$

On va déduire de (1) et (2) une suite exacte

$$(7) \quad 0 \rightarrow H_2(G, \mathfrak{G}) \rightarrow (E_1)_G \xrightarrow{D'} k^\times \otimes k^+ \rightarrow H_1(G, \mathfrak{G}) \rightarrow 0;$$

pour cela, on adapte à l'homologie à coefficients dans l'action adjointe, des arguments de [6], sur lesquels nous ne reviendrons pas en détail :

L'étude de la suite spectrale de l'extension :

$$0 \rightarrow k^+ \rightarrow B \rightarrow T \rightarrow 1,$$

permet de montrer que l'on a des isomorphismes :

$$H_*(T, \mathfrak{T}) \rightarrow H_*(B, \mathfrak{B});$$

de plus :

$$H_n(T, \mathfrak{T}) \simeq (\Lambda_{\mathbb{Z}}^n k^\times) \otimes_{\mathbb{Z}} k^+;$$

l'action adjointe par l'élément du groupe de Weyl : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, montre alors que les images des applications :

$$H_2(B, \mathfrak{B}) \rightarrow H_2(G, \mathfrak{G})$$

$$H_1(T, \mathfrak{T}) \rightarrow H_1(G, E_0)$$

sont nulles ; en fait l'expression de $H_*(T, \mathfrak{T})$ ci-dessus, entraîne que les applications :

$$H_n(T, \mathfrak{T}) \rightarrow H_n(G, \mathfrak{G})$$

sont nulles si n est pair ; pour la deuxième il faut jouer sur le fait que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ échange ∞ et 0 dans $P_1(k)$: on renvoie à [6], pour un argument analogue ; enfin du triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_0(T, \mathfrak{T}) & \xrightarrow{\mu} & H_0(G, E_0) \\ \times 2 \searrow & & \swarrow \lambda \\ & & H_0(B, \mathfrak{B}) \end{array}$$

on déduit que les surjections λ et μ qui apparaissent dans les suites exactes (5) et (6) sont en fait des isomorphismes. La suite exacte (7) en résulte.

Nous arrivons au résultat principal que nous avons en vue :

THÉORÈME. *Soit k un corps de caractéristique 0, où tout élément est un carré, on a :*

$$H_1(SL(2, k), \mathfrak{sl}(2, k)) = \Omega_k^1$$

$$H_2(SL(2, k), \mathfrak{sl}(2, k)) = 0.$$

Comme k est de caractéristique 0, la suite spectrale de l'extension :

$$1 \rightarrow \{ \pm 1 \} \rightarrow SL(2, k) \rightarrow PSL(2, k) \rightarrow 1,$$

montre que :

$$H_*(SL(2, k), \mathfrak{sl}(2, k)) \simeq H_*(PSL(2, k), \mathfrak{sl}(2, k)).$$

On obtient le théorème en comparant la suite exacte (7) avec la suite exacte de $d \log$. En effet soit :

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathcal{B}_k &\rightarrow (E_1)_G \\ [a] &\mapsto \langle a \rangle. \end{aligned}$$

on a :

LEMME 2. *Le triangle :*

$$\begin{array}{ccc} (E_1)_G & \xrightarrow{D'} & k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} k^+ \\ & \searrow A & \nearrow D \\ & & \mathcal{B}_k \end{array}$$

est commutatif, à un facteur scalaire non nul près.

Il en résulte, puisque Λ est surjective et D injective, que A est en fait bijective et que (7) est isomorphe à la suite de $d \log$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H_2(G, \mathfrak{G}) & \rightarrow & (E_1)_G & \xrightarrow{D'} & k^\times \otimes k^+ & \rightarrow & H_1(G, \mathfrak{G}) \rightarrow 0 \\ \parallel & & \uparrow A & & \parallel & & \uparrow \simeq \\ 0 \longrightarrow & \mathcal{B}_k & \xrightarrow{D} & k^\times \otimes k^+ & \longrightarrow & \Omega_k^1 & \longrightarrow 0. \end{array}$$

Donc il reste à prouver le lemme.

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 E_1 & \longrightarrow & \coprod_{\substack{a,b \in \mathcal{P}_1(k) \\ a \neq b}} \mathfrak{B}_a \cap \mathfrak{B}_b \\
 \downarrow D' & & \uparrow \delta \\
 & & C_1\left(G, \coprod_{a,b} \mathfrak{B}_a \cap \mathfrak{B}_b\right) \xrightarrow{\partial} C_1\left(G, \coprod_a \mathfrak{B}_a\right) \\
 & & \uparrow \\
 & & Z_1\left(G, \coprod_a \mathfrak{B}_a\right) \\
 & & \downarrow p \\
 k^\times \otimes k^+ \simeq Z_1(T, \mathfrak{I}) & \xleftarrow{p} & Z_1(B, \mathfrak{B}),
 \end{array}$$

on va expliciter l'application D' à l'aide de ce schéma :

C_1 et Z_1 désignent les chaînes et les cycles pour l'homologie des groupes, δ est la différentielle du complexe non homogène d'homologie des groupes (on utilisera les conventions de [6]),

s est sous-jacent au lemme de Shapiro,

p est induit par les projections :

$$B \rightarrow T \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{I}.$$

Soit $a \in k \setminus \{0, 1\}$, on commence par expliciter une chaîne :

$$\alpha \in C_1\left(G, \coprod_{a,b} \mathfrak{B}_a \cap \mathfrak{B}_b\right)$$

telle que :

$$\delta\alpha = Q_a;$$

pour cela, introduisons les éléments f_1, f_2, f_3 de G représentés par les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

on a :

$$f_1: \infty \mapsto 1, \quad 0 \mapsto a$$

$$f_2: \infty \mapsto 0, \quad 1 \mapsto a$$

$$f_3: 0 \mapsto \infty, \quad 1 \mapsto a$$

on vérifie que :

$$f_1 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} | \infty, 0 | \right) = \begin{pmatrix} a+1 & -2a \\ 2 & -(a+1) \end{pmatrix} | 1, a |$$

$$f_2 \cdot \left(\begin{pmatrix} a & -2a \\ 0 & -a \end{pmatrix} | \infty, 1 | \right) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ -2 & a \end{pmatrix} | 0, a |$$

$$f_3 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} | 0, 1 | \right) = \begin{pmatrix} -1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | \infty, a | ;$$

on en déduit :

$$Q_a = u_1 + u_2 + u_3 + f_1 \cdot u_1 + f_2 \cdot u_2 + f_3 \cdot u_3,$$

où :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} | \infty, 0 |, \quad u_2 = \begin{pmatrix} a & -2a \\ 0 & -a \end{pmatrix} | \infty, 1 |, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} | 0, 1 | ;$$

soit de plus f_4, f_5 les éléments de G représentés par les matrices

$$\begin{pmatrix} \frac{a-1}{a} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a+1 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

on a :

$$\begin{array}{ll} \infty \mapsto \infty & 0 \mapsto \infty \\ f_4 : 0 \mapsto 1 & , \quad f_5 : 1 \mapsto 1 \\ a \mapsto a & a \mapsto a \end{array}$$

de plus :

$$f_4 \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 1-a & 2(a-1) \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} | \infty, 1 |,$$

$$f_5 \cdot u_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | \infty, 1 |,$$

d'où

$$f_4 \cdot u_1 + u_2 + f_5 \cdot u_3 = 0 ;$$

il en résulte :

$$\begin{aligned} Q_a &= u_1 - f_4 \cdot u_1 + u_3 - f_5 \cdot u_3 + f_1 \cdot u_1 - (f_2 f_4 f_1^{-1}) \cdot (f_1 \cdot u_1) + \\ &\quad + f_3 \cdot u_3 - (f_2 f_5 f_3^{-1}) \cdot (f_3 \cdot u_3) ; \end{aligned}$$

ce qui prouve que Q_a est le bord de la chaîne $\alpha \in C_1(G, \perp_{a,b} \mathfrak{B}_a \cap \mathfrak{B}_b)$ suivante :

$$\alpha = [f_4]u_1 + [f_5]u_3 + [f_2f_4f_1^{-1}](f_1 \cdot u_1) + [f_2f_5f_3^{-1}](f_3 \cdot u_3);$$

notons que $f_2f_4f_1^{-1}$ et $f_2f_5f_3^{-1}$ sont représentés par les matrices :

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{a-1} & \frac{a}{1-a} \\ \frac{1}{a(a-1)} & \frac{2-a}{1-a} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & a \\ \frac{a}{1-a} & \frac{a^2+a-1}{a-1} \end{pmatrix};$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \partial\alpha &= [f_4] \left(\begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} |0| \right) - [f_4] \left(\begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} |\infty| \right) + \\ &+ [f_5] \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} |1| \right) - [f_5] \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} |0| \right) + \\ &+ [f_2f_4f_1^{-1}] \left(\begin{pmatrix} a+1 & -2a \\ 2 & -(a+1) \end{pmatrix} |a| \right) - [f_2f_4f_1^{-1}] \left(\begin{pmatrix} a+1 & -2a \\ 2 & -(a+1) \end{pmatrix} |1| \right) + \\ &+ [f_2f_5f_3^{-1}] \left(\begin{pmatrix} -1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |a| \right) - [f_2f_5f_3^{-1}] \left(\begin{pmatrix} -1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |\infty| \right); \end{aligned}$$

notons que $\delta(\partial\alpha) = \partial Q_a = 0$, donc $\partial\alpha$ est un cycle de $C_1(G, \perp_{a \in P_1(k)} \mathfrak{B}_a)$.

Explicitons maintenant $s(\partial\alpha)$; d'après [6], l'application :

$$s: Z_1 \left(G, \perp_a \mathfrak{B}_a \right) \rightarrow Z_1(B, \mathfrak{B}),$$

sous-jacente au lemme de Shapiro, s'obtient par la recette suivante (on renvoie aussi à [9] pour des formules explicites).

Si $f \mapsto \hat{f}$ est une "section" de l'application quotient: $G \rightarrow G/B$, alors s est donnée au niveau des 1-chaînes par :

$$[g](h \cdot u) \mapsto ((gh)\hat{\ })^{-1} g \hat{h} (\hat{h}^{-1} h \cdot u)$$

où $u \in \mathfrak{B}$; on utilisera la section définie par :

$$\hat{g} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{si } g(\infty) = \infty \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{si } g(\infty) = 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{si } g(\infty) = 1 \\ \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{si } g(\infty) = c ; \end{cases}$$

pour calculer $s(\partial\alpha)$, on écrit d'abord les éléments de l'expression de $\partial\alpha$ sous la forme $[g](h \cdot u)$ où $u \in \mathfrak{B}_\infty$; cela donne :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}|0| &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} | \infty | \right) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}|1| &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} | \infty | \right) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}|0| &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | \infty | \right) \\ \begin{pmatrix} a+1 & -2a \\ 2 & -(a+1) \end{pmatrix}|a| &= \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} | \infty | \right) \\ \begin{pmatrix} a+1 & -2a \\ 2 & -(a+1) \end{pmatrix}|1| &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1-a & 2 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} | \infty | \right) \\ \begin{pmatrix} -1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}|a| &= \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} | \infty | \right). \end{aligned}$$

Le résultat du calcul de $s(\partial\alpha)$ est alors :

$$s(\partial\alpha) =$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a-1}{a} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} \frac{a-1}{a} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -a & a+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
& + \left[\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a(a-1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} \frac{a-1}{a} & \frac{1}{a(a-1)} \\ 0 & \frac{a}{a-1} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a-1 & -2 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} \\
& + \left[\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{1-a} \\ 0 & \frac{a^2}{a-1} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} \frac{a}{1-a} & \frac{a^2+a-1}{1-a} \\ 0 & a \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & -2a \\ 0 & -1 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

identifiant: k^\times à T par l'application qui à $a \in k^\times$ associe l'élément de T représenté par $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

k^+ à \mathfrak{T} par l'application qui associe à $a \in k^+$ la matrice $\begin{pmatrix} a/2 & 0 \\ 0 & -a/2 \end{pmatrix}$.

On obtient finalement, par projection, que $D'(\langle a \rangle)$ est l'élément suivant de $k^\times \otimes k^+$:

$$\begin{aligned}
D'(\langle a \rangle) &= 2 \left(\frac{a}{a-1} \otimes (a-1) + \frac{a-1}{a} \otimes (a-1) + \frac{1}{a} \otimes 1 + (-a) \otimes 1 + \right. \\
&\quad \left. + 1 \otimes (a-1) + \left(\frac{a-1}{a} \right)^2 \otimes (a-1) + \frac{a-1}{a^2} \otimes 1 + \frac{1}{1-a} \otimes 1 \right) \\
&= 2((a-1)^2 \otimes (a-1) - a^2 \otimes (a-1) + (a-1) \otimes 1 - a^2 \otimes 1 - (1-a) \otimes 1) \\
&= -4(a \otimes a + (1-a) \otimes (1-a)) \\
&= -4D([a]),
\end{aligned}$$

d'où le théorème.

Noter que le facteur 4 provient du fait que l'on a travaillé sur $\mathrm{PSL}(2, k)$ et non sur $\mathrm{SL}(2, k)$ et le signe des conventions sur l'homologie.

2.4 Où l'on retrouve l'homologie du groupe affine et la suite de dlog.

Dans ce paragraphe k vérifie les hypothèses du Théorème 2. On se propose de relier l'application $\lambda: \mathcal{B}_k \rightarrow (E_1)_G$ du paragraphe précédent à l'homologie du groupe affine.

Pour cela, on observe d'abord que: $(\mathrm{GA}(1, k), l^k)$, s'identifie naturellement à: $(B, \mathfrak{G}/\mathfrak{B})$, où B opère dans $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ par l'action adjointe.

Introduisons le diagramme de G -modules:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \rightarrow & E_0 & \rightarrow & \coprod_{a \in P_1} \mathfrak{B}_a & \rightarrow & \mathfrak{G} & \rightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 (8) \quad 0 \rightarrow & L_0 & \rightarrow & ZG \otimes_{ZG} \mathfrak{G} & \rightarrow & \mathfrak{G} & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & \coprod_{a \in P_1} \mathfrak{G}/\mathfrak{B}_a & \rightarrow & \coprod_{a \in P_1} \mathfrak{G}/\mathfrak{B}_a & \rightarrow & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & 0 & & 0 & & &
 \end{array}$$

Par le lemme de Schapiro, on a une suite exacte:

$$H_2(G, L_0) \rightarrow H_2(B, \mathfrak{G}/\mathfrak{B}) \xrightarrow{\varrho} H_1(G, E_0) \rightarrow H_1(G, L_0);$$

soit d'autre part:

$$v: H_1(G, E_0) \rightarrow H_0(G, E_1),$$

le morphisme de connexion de (6) on a:

PROPOSITION 6.

$$v \circ \varrho: H_2(B, \mathfrak{G}/\mathfrak{B}) \rightarrow H_0(G, E_1)$$

s'identifie naturellement à l'application:

$$\begin{aligned}
 A: \mathfrak{B}_k &\rightarrow (E_1)_G \\
 [a] &\mapsto \langle a \rangle.
 \end{aligned}$$

Cela résulte du lemme suivant:

LEMME 3. *Le morphisme de connexion:*

$$D'': H_2(B, \mathfrak{G}/\mathfrak{B}) \rightarrow H_1(B, \mathfrak{B})$$

provenant de la suite exacte longue associée à:

$$0 \rightarrow \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}/\mathfrak{B} \rightarrow 0$$

s'identifie naturellement à:

$$D: \mathfrak{B}_k \rightarrow k^\times \otimes k^+.$$

La proposition en résulte; en effet du diagramme (8), on extrait un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 H_2(B, \mathfrak{G}/\mathfrak{B}) & \xrightarrow{\varrho} & H_1(G, E_0) \\
 D'' \downarrow & & \downarrow v \\
 H_1(B, \mathfrak{B}) & \xleftarrow{D'} & H_0(G, E_1)
 \end{array}$$

on en déduit la proposition, compte tenu du Théorème 1 et du Lemme 2.

Passons à la preuve du lemme; reprenons la résolution de 1.4.

$$\dots \rightarrow A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow A_0 \rightarrow \mathfrak{G}/\mathfrak{B} \rightarrow 0$$

avec les suites exactes:

$$0 \rightarrow W_1 \rightarrow A_1 \rightarrow W_0 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow W_0 \rightarrow A_0 \rightarrow \mathfrak{G}/\mathfrak{B} \rightarrow 0;$$

pour expliciter le morphisme de connexion:

$$H_2(B, \mathfrak{G}/\mathfrak{B}) \rightarrow H_1(B, \mathfrak{B}),$$

on se promène dans le diagramme suivant analogue de celui utilisé dans le Lemme 2, où δ désigne la différentielle de l'homologie des groupes et Z les cycles correspondants (on adopte les conventions et les notations du paragraphe précédent):

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{B}_k & \xrightarrow{\partial} & W_1 & & & & \\
 \downarrow & & \delta \uparrow & & & & \\
 & & \mathcal{C}_1(B, A_1) & \xrightarrow{\partial} & Z_1(B, W_0) & & \\
 & & & & \delta \uparrow & & \\
 & & & & \mathcal{C}_2(B, A_0) & \xrightarrow{\partial} & Z_2(B, \mathfrak{G}/\mathfrak{B}) \\
 & & & & & & \downarrow \text{"section"} \\
 & & & & & & k^x \otimes k^+ \leftarrow Z_1(T, \mathfrak{A}) \leftarrow Z_1(B, \mathfrak{B}) \dots \xleftarrow{\delta} \ell_2(B, \mathfrak{G}).
 \end{array}$$

Soit $a \in k \setminus \{0, 1\}$, $[a] \in \mathcal{B}_k$ est représenté par $|0, 1, a| \in A_2$; on a.

$$\begin{aligned}
 \partial|0, 1, a| &= |1, a| - |0, a| + |0, 1| \\
 &= l_1((a-1)\tilde{~}|0, 1|) - l_2(\tilde{a}|0, 1|) + |0, 1|;
 \end{aligned}$$

où l_1 et $l_2 \in B$ sont représentés par les matrices:

$$\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et \tilde{a} désigne l'élément de $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ représenté par:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

\tilde{I} n'étant pas écrit.

On a alors:

$$\partial|0, 1, a| = \delta(\gamma)$$

avec:

$$\gamma = [l_1]|0, 1| - [l_1 l_2^{-1}]|0, a|;$$

poursuivant le parcours dans le diagramme:

$$\partial\gamma = [l_1]|1| - [l_2]|0| - [l_1 l_2^{-1}]|a| + [l_1 l_2^{-1}]|0|;$$

pour $c \in k$, on note h_c l'élément de B représenté par:

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

en exploitant une homotopie pour le lemme de Schapiro, on construit l'élément suivant de $\mathcal{C}_2(B, A_0)$:

$$\begin{aligned} \alpha = & [h_{-a}|l_1 h_1]|0| - [l_1 h_1|h_{-1}]|1| - [h_{-1}|l_1]|0| - [h_{-a}|l_1 l_2^{-1} h_a]|0| + \\ & + [l_1 l_2^{-1} h_a|h_{-a}]|a| + [h_{-1}|l_1 l_2^{-1}]|0| \end{aligned}$$

qui est tel que:

$$\delta\alpha = \partial\gamma;$$

A partir de là, il est aisé de poursuivre la promenade dans le diagramme et de vérifier le Lemme 3.

Pour terminer ces considérations, on voudrait noter une autre apparition de la suite exacte de $d \log$.

La suite exacte classique:

$$0 \rightarrow I \rightarrow k \otimes_{\mathbb{Z}} k \xrightarrow{\mu} k \rightarrow 0$$

où μ est la multiplication, est considéré comme une suite de k^\times -module par:

$$a \cdot (b \otimes c) = ba^{-1} \otimes ac,$$

on en déduit une suite exacte:

$$0 \rightarrow \frac{H_1(k^\times, k \otimes_{\mathbb{Z}} k)}{\text{Im } H_1(k^\times, I)} \rightarrow H_1(k^\times, k) \rightarrow H_0(k^\times, I) \rightarrow 0,$$

c'est la suite de $d \log$.

3. Une présentation de \mathcal{P}/\mathcal{L} .

En rapport avec ce qui précède, on voudrait remarquer que le théorème de J. P. Sydler contient l'assertion suivante :

PROPOSITION (J. P. Sydler, B. Jessen). *Le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathcal{P}/\mathcal{L} des polyèdres de \mathbb{R}^3 modulo les prismes ([10]), est isomorphe au \mathbb{R} -espace vectoriel \mathcal{A} engendré par les symboles :*

$$\langle a, b \rangle, \quad a, b \in]0, 1[$$

soumis aux relations :

$$1) \quad \forall a, b \in]0, 1[, \quad \langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle.$$

$$2) \quad \forall a, b, c \in]0, 1[, \quad \langle b, c \rangle - \langle ab, c \rangle + \langle a, b \rangle = 0,$$

$$3) \quad \forall a, b, c \in]0, \infty[, \quad a \left\langle \frac{a+b}{a+b+c}, \frac{a}{a+b} \right\rangle + b \left\langle \frac{a+b}{a+b+c}, \frac{b}{a+b} \right\rangle \\ - a \left\langle \frac{a+c}{a+b+c}, \frac{a}{a+c} \right\rangle - c \left\langle \frac{a+c}{a+b+c}, \frac{c}{a+c} \right\rangle = 0,$$

$$4) \quad \forall a, b \in]0, 1[,$$

$$\langle a, b \rangle + \frac{1-b}{b} \left\langle \frac{a(1-b)}{a+b-2ab}, 1-b \right\rangle + \frac{1-a}{a} \left\langle \frac{(1-a)b}{a+b-2ab}, 1-a \right\rangle = 0.$$

On observe d'abord que les éléments $T(a, b)$ de \mathcal{P}/\mathcal{L} vérifient les relations ci-dessus. 1) est évidente et 2) et 3) sont exactement les Lemmes 1 et 2 de [10]; quand à la relation 4) c'est en fait une traduction du Lemme 3 (cf. [10]); en effet, soit $ABCDEF$ le demi parallélépipède rectangle, comme sur la Figure 1, construit sur le tétraèdre: $ABCD = T(a, b)$, où $a = \sin^2 \alpha$, $b = \sin^2 \beta$. Un coup d'oeil à la figure montre que, dans \mathcal{P}/\mathcal{L} , on a :

$$AECD = \frac{\cotg \beta}{\cotg \beta'} T(a', b'),$$

avec $a' = \sin^2 \alpha'$, $b' = \sin^2 \beta'$.

$$AEFD = \frac{\cotg \alpha}{\cotg \beta''} T(a'', b''),$$

avec $a'' = \sin^2 \alpha''$, $b'' = \sin^2 \beta''$;

Les relations :

$$\alpha + \beta'' = \frac{\pi}{2}, \quad \beta + \beta' = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha' + \alpha'' = \frac{\pi}{2},$$

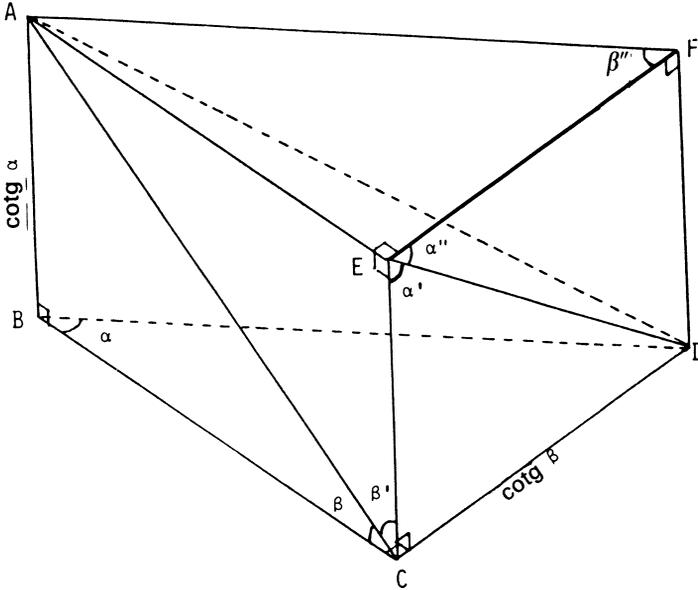


Figure 1.

entraînent :

$$b'' = 1 - a, b' = 1 - b, a' + a'' = 1;$$

de plus :

$$a = \sin^2 \alpha = \frac{\cotg^2 \beta}{\cotg^2 \alpha + \cotg^2 \beta} = \frac{a(1-b)}{a+b-2ab},$$

$$a'' = 1 - a' = \frac{(1-a)b}{a+b-2ab};$$

enfin :

$$\left(\frac{\cotg \beta}{\cotg \beta''}\right)^2 = \frac{b'(1-b)}{(1-b')b} = \frac{(1-b)^2}{b^2}$$

$$\left(\frac{\cotg \alpha}{\cotg \beta''}\right)^2 = \frac{b''(1-a)}{(1-b'')a} = \frac{(1-a)^2}{a^2},$$

d'où la relation 4).

Considérons alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}/\mathcal{L} & \xrightarrow{\mathcal{D}} & \mathbf{U} \otimes i\mathbb{R} \\
 \uparrow j & \nearrow \mathcal{D}' & \\
 \mathcal{A} & &
 \end{array}$$

où $j: \langle a, b \rangle \mapsto T(a, b)$, et $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \circ j$. La lecture de [10], montre que tous les arguments de la preuve de l'injectivité de \mathcal{D} sont contenus dans la relation $T(a, b) = T(b, a)$ et les Lemmes 1, 2 et 3, et résultent en fait de ce que les $T(a, b)$ vérifient les relations de la proposition; donc en reprenant [10], on voit que \mathcal{D}' est injective et par suite, j est un isomorphisme.

BIBLIOGRAPHIE

||

1. S. Bloch, *Higher regulators, algebraic K-theory and zeta functions of elliptic curves*. Lectures given at the University of California, Irvine, 1978.
2. P. Cartier, *Décomposition des polyèdres: le point sur le troisième problème de Hilbert*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1984–85, Exp. 646, Astérisque No. 133–134 (1986), 261–288.
3. J. L. Cathelineau, *Remarques sur l'homologie de $SO(n, \mathbb{R})$ considéré comme groupe discret*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 295 (1982), 281–283.
4. J. L. Cathelineau, *Homologie de degré trois d'algèbres de Lie simples déployées étendues à une algèbre commutative*. L'Ens. Math. 33, (1987), 159–173.
5. J. L. Dupont, *Algebra of polytopes and homology of flag complexes*, Osak J. Math. 19 (1982), 599–641.
6. J. L. Dupont et C.-H. Sah, *Scissor congruences II*, J. Pure Appl. Algebra 25 (1982), 159–195.
7. W. Dwyer, *Twisted homological stability for general linear groups*, Ann. of Math. 111 (1980), 239–251.
8. T. G. Goodwillie, *On the general linear group and Hochschild homology*, Ann. of Math. 121 (1985), 383–407.
9. A. Guichardet, *Cohomologie des Groupes Topologiques et des Algèbres de Lie*, Cedec, Paris, 1980.
10. B. Jessen, *The algebra of polyhedra and the Dehn-Sydler Theorem*, Math. Scand. 22 (1968), 241–256.
11. B. Jessen, J. Karpf et A. Thorup, *Some functional equations in groups and rings*. Math. Scand. 22 (1968), 257–265.
12. W. van der Kallen, *Le K_2 des nombres duaux*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B 273 (1971), 1204–1207.
13. Ch. Kassel, *Calcul algébrique de l'homologie de certains groupes de matrices*. J. Algebra, 80 (1983), 235–260.
14. C.-H. Sah, *Hilbert's third problem: scissors congruences* (Research Notes in Math. 33), Pitman Publishing Ltd., London, 1979.
15. C.-H. Sah, *Homology of classical Lie groups made discrete III: H_3 , K_3 and relations with scissors congruences*. Preprint, State University of New York, Stony Brook, 1985.
16. C.-H. Sah, *Lettre à l'auteur*, Août 1986.
17. J. P. Sydler, *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*, Comment Math. Helv. 40 (1965), 43–80.