

FONCTIONS SÉPARÉMENT CONTINUES ET DE PREMIÈRE CLASSE SUR UN ESPACE PRODUIT

GABRIEL DEBS

Abstract.

We prove that if $X = Y = [0, 1]$ and $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous in one of the two variables and of the first Baire class in the other variable, then f is jointly continuous at any point of a dense G_δ subset of $X \times Y$. The result is proved under quite general assumptions on X and Y , in particular when X and Y are metrizable spaces such that the product space $X \times Y$ is a Baire space.

Résumé

On montre que si $X = Y = [0, 1]$ et $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en l'une des variables et de première classe de Baire en l'autre, alors f est continue en tout point d'un résiduel de $X \times Y$. En fait le résultat est démontré sous des hypothèses assez générales sur X et Y , en particulier lorsque X et Y sont des espaces métrisables dont le produit $X \times Y$ est un espace de Baire.

0. Introduction.

Il est bien connu que si $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction séparément continue alors f est de première classe et en particulier l'ensemble $\text{Cont}(f)$ de ses points de continuité (jointe) est dense dans $[0, 1] \times [0, 1]$. En fait dans ce cadre on peut montrer que $\text{Cont}(f) \supset G \times [0, 1]$ où G est un résiduel de $[0, 1]$, et cette conclusion reste vraie si on suppose seulement que les fonctions partielles $f(x, \cdot)$ et $f(\cdot, y)$ sont continues sur $[0, 1]$ pour tout $(x, y) \in [0, 1] \times D$ où D est une partie dense de $[0, 1]$. Or sous ces dernières hypothèses, tout $y \in [0, 1]$ s'écrit $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ avec $y_n \in D$ et par suite $f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x, y_n)$ et la fonction $f(\cdot, y)$ apparaît comme fonction de première classe pour tout $y \in [0, 1]$. D'où le problème naturel suivant:

Si pour $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ on suppose $f(x, \cdot)$ continue et $f(\cdot, y)$ de première classe pour tout $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, peut-on trouver des points de continuité jointe de f ?

Remarquons tout de suite qu'une telle fonction est nécessairement de deuxième classe de Baire en (x, y) mais n'est pas en général de première classe; et c'est là une différence fondamentale avec le cas des fonctions séparément continues. Nous montrons dans ce travail que la réponse à la question précédente est positive. Plus généralement si X et Y sont deux espaces métrisables et $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ est continue dans la deuxième variable et de première classe dans la première, alors l'ensemble $\text{Cont}(f)$ est dense dès que l'espace produit $X \times Y$ est de Baire; c'est en particulier le cas dès que X et Y sont des espaces de Baire dont l'un au moins est à base dénombrable ou complet pour sa métrique.

En fait la démonstration que nous donnerons est valable sous des hypothèses plus générales qui s'expriment en terme de jeux topologiques et que nous préciserons ultérieurement. Plus qu'une recherche de généralité l'utilisation des jeux nous paraît plus éclairante pour la démonstration, et sûrement bien adaptée à ce type de problèmes.

1. Espaces de Baire et jeux topologiques.

Nous rappelons que le jeu de Choquet $\mathcal{J}(X)$ sur un espace topologique X est un jeu à deux joueurs α et β . C'est le joueur β qui commence les parties en choisissant un ouvert non vide U_0 de X puis le joueur α doit répondre par un ouvert non vide $U_1 \subset U_0$ et ainsi de suite, les joueurs α et β choisissent alternativement un ouvert non vide contenu dans le dernier ouvert choisi par l'autre joueur. Le joueur α gagne la partie si $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$; le joueur β gagne la partie sinon. L'espace X est de Baire si et seulement si le joueur β n'a pas de stratégie gagnante dans ce jeu et on dit alors que l'espace X est β -défavorable. (Pour plus de détails voir [1], [5], ou [6].)

Ces concepts sont très utiles pour l'étude des produits d'espace de Baire. En effet alors que le produit de deux espaces de Baire peut ne pas être de Baire (voir [4] pour un exemple simple) le produit d'un espace α -favorable et d'un espace β -défavorable (c'est-à-dire de Baire) est un espace de Baire. Cependant cette propriété ne caractérise pas les espaces α -favorables parmi les espaces de Baire: En effet le produit d'un espace de Baire et d'un espace de Baire à base dénombrable quelconque est un espace de Baire; et il est facile de construire avec l'axiome du choix un sous-espace de \mathbb{R} qui soit de Baire et non α -favorable. (il suffit de considérer une partie X de \mathbb{R} telle que X et $\mathbb{R} \setminus X$ recouvrent tout fermé non dénombrable de \mathbb{R}).

Des variantes du jeu de Choquet – liées à la recherche de points de continuité d'une fonction séparément continue – ont été introduites par J. P. R. Christensen [2] puis par J. Saint Raymond [6]. Nous utiliserons dans ce travail une variante qui se situe entre les deux précédentes. Dans ce nouveau jeu $\mathcal{J}'(X)$ c'est toujours le joueur β qui commence les parties; les deux joueurs choisissent alternativement des ouverts non vides U_n formant une suite décroissante et de plus on demande au joueur α de choisir au coup $(2n+1)$ un point $x_n \in U_{2n+1}$. Le joueur α gagne la partie si

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \cap \overline{\{x_p; p \in \mathbb{N}\}} \neq \emptyset ;$$

le joueur β gagne la partie sinon. Il est clair que le jeu $\mathcal{J}'(X)$ est plus favorable pour β que le jeu $\mathcal{J}(X)$. En particulier un espace β -défavorable pour $\mathcal{J}'(X)$ est nécessairement un espace de Baire.

NOTATIONS. Dans la suite on notera \mathcal{B} la classe des espaces de Baire et par \mathcal{B}' la classe des espaces β -défavorables pour \mathcal{J}' .

Signalons que tout espace $X \in \mathcal{B}'$ est aussi β -défavorable pour le jeu G_σ étudié dans [6], et par conséquent c'est un espace de Namioka. En particulier l'espace construit par M. Talagrand dans [7] est un exemple d'un objet de $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$.

Les propriétés suivantes seront admises dans la suite.

PROPRIETES.

1. La classe \mathcal{B}' est contenue strictement dans \mathcal{B} .
2. La classe \mathcal{B}' contient :
 - a) Les espaces de Baire métrisables.
 - b) Les produits quelconques d'espaces métriques complets.
 - c) Les produits quelconques d'espaces localement compacts.
 - d) Les espaces $\mathcal{E}(K)$ ensembles des points extrémaux d'un convexe compact K d'un espace localement convexe séparé.

2. Applications de première classe.

Si X est un espace topologique et Z un espace métrique, on dit qu'une application $\varphi: X \rightarrow Z$ est de première classe si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute partie A non vide de X , il existe dans A un ouvert relatif non vide U tel que $\text{diam}(\varphi(U)) \leq \varepsilon$.

Toute fonction $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ semi-continue supérieurement bornée est de première classe. Si tout fermé de X est un espace de Baire alors toute limite simple d'une suite de fonctions continues sur X est de première classe; si de

plus l'espace est métrisable (en particulier si X est un espace métrique complet) et $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que l'image réciproque par φ de tout intervalle ouvert est un F_σ de X , alors φ est de première classe.

Enfin précisons une terminologie qui sera commode pour la suite: Soient X et Y des espaces topologiques, Z un espace métrique et $f: X \times Y \rightarrow Z$ vérifiant:

- (i) $f(x, \cdot)$ est continue sur Y , pour tout $x \in X$,
- (ii) $f(\cdot, y)$ est de première classe sur X , pour tout $y \in Y$.

On dira alors que f est continue en Y et de première classe en X .

THÉORÈME 1. Soient X et Y deux espaces topologiques et Z un espace métrique vérifiant les hypothèses suivantes:

- a) Tout point de X possède un système fondamental dénombrable de voisinages.
- b) $Y \in \mathcal{B}'$.
- c) $X \times Y \in \mathcal{B}$.

Alors pour toute application $f: X \times Y \rightarrow Z$ continue en Y et de première classe en X , l'ensemble $\text{Cont}(f)$ est dense dans $X \times Y$.

DÉMONSTRATION. Soient $\varepsilon > 0$; on définit pour tout $U \subset X$:

$$H_\varepsilon(U) = \{y \in Y \text{ tels que } \text{diam}(f(U \times \{y\})) > \varepsilon\}$$

et pour tout $V \subset Y$

$$G_\varepsilon(V) = \bigcup \{U \text{ ouvert de } X \text{ tel que } V \setminus H_\varepsilon(U) \neq \emptyset\}.$$

LEMME. Pour tout ouvert non vide V de Y , l'ouvert $G_\varepsilon(V)$ est dense dans X .

DÉMONSTRATION. Fixons un ouvert V non vide de Y . Les hypothèses sur X étant vérifiées par un ouvert quelconque de X , il suffit de montrer que $G_\varepsilon(V)$ est non vide. Nous raisonnons alors par l'absurde, en supposant

$$(1) \quad \forall U \text{ ouvert de } X, \quad V \subset \overline{H_\varepsilon(U)}.$$

Nous allons grâce à cette hypothèse, construire une stratégie pour le joueur β dans le jeu $\mathcal{J}'(Y)$.

Soit d une distance définissant la structure métrique de Z .

Fixons pour tout $x \in X$, une suite $(B_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ formant un système fondamental de voisinages ouverts du point x . Et pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixons une fonction $\pi_n = X \times Y \rightarrow X$ à domaine partiel vérifiant:

$$(2a) \quad \text{Dom}(\pi_n) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in H_\varepsilon(B_n(x))\},$$

$$(2b) \quad \pi_n(x, y) \in B_n(x),$$

$$(2c) \quad d(f(\pi_n(x, y), y), f(x, y)) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'existence d'une telle fonction découle immédiatement de la définition même de $H_\varepsilon(U)$.

Au cours d'une partie dans $\mathcal{J}'(Y)$

β joue: $V_0 \quad V_2 \dots V_{2n}$

α joue: $(V_1, y_0) \quad \dots \quad (V_{2n+1}, y_n)$.

Posons alors

$$(3) \quad \begin{cases} A_0 = \{x_0\} \\ A_{n+1} = A_n \cup \pi_n(A_n \times \{y_n\}) \end{cases}$$

où x_0 est un point quelconque fixé dans X . Il est à noter, que d'après (2a), la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est bien définie par (3) que si l'on a de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(4) \quad \forall x \in A_n, \quad y_n \in H_\varepsilon(B_n(x)).$$

Enfin, si la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie posons pour tout $W \subset V$

$$\tau(W; \langle y_k \rangle_{0 \leq k \leq n}) = \bigcap_{\substack{x \in A_k \\ 0 \leq k \leq n}} \{y \in W : d(f(\pi_k(x, y_k), y), f(x, y)) > \varepsilon/2\}.$$

Nous définissons alors une stratégie σ pour le joueur β dans $\mathcal{J}'(Y)$ par

$$V_0 = \sigma(\emptyset) = V \cap H_\varepsilon(B_0(x_0))$$

et

$$\begin{aligned} V_{2n+2} &= \sigma(\langle (V_{2k+1}, y_k) \rangle_{0 \leq k \leq n}) \\ &= \tau(V_{2n+1}, \langle y_k \rangle_{0 \leq k \leq n}) \cap \bigcap_{x \in A_{n+1}} H_\varepsilon(B_{n+1}(x)). \end{aligned}$$

Il est clair que pour toute partie licite de $\mathcal{J}'(Y)$ et compatible avec σ on a que

$$y_n \in V_{2n+1} \subset V_{2n} \subset \bigcap_{x \in A_n} H_\varepsilon(B_n(x)).$$

Ainsi la condition (4) est automatiquement réalisée et la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie. Donc la seule chose à vérifier est que σ définit des coups licites pour β , c'est-à-dire des ouverts non vides.

Il découle de la finitude des ensembles A_n et de la continuité de f en Y que les ensembles définis par τ et σ sont ouverts. D'autre part l'hypothèse (1) assure que les ouverts $H_\varepsilon(U)$ sont denses dans V , donc il suffit de vérifier que dans toute partie compatible avec σ les ensembles

$$W_n = \tau(V_{2n+1}, \langle y_k \rangle_{0 \leq k \leq n})$$

sont non vides. En fait nous allons montrer par récurrence sur n , que $y_n \in W_n$, c'est-à-dire que

$$(5) \quad \forall k \leq n, \quad \forall x \in A_k, \quad d(f(\pi_k(x, y_k), y_n), f(x, y_n)) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $n=0$ la relation

$$d(f(\pi_0(x_0, y_0), y_0), f(x_0, y_0)) > \frac{\varepsilon}{2}$$

découle de (2c) puisque $y_0 \in B_0(x_0)$.

Supposons que $y_n \in W_n$ alors puisque $y_{n+1} \in V_{2n+2} \subset W_n$ on a par définition même de W_n

$$(5') \quad \forall k \leq n, \quad \forall x \in A_k, \quad d(f(\pi_k(x, y_k), y_{n+1}), f(x, y_{n+1})) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part comme la condition (4) est vérifiée par tout n on a par (2c)

$$(5'') \quad \forall x \in A_{n+1}, \quad d(f(\pi_{n+1}(x, y_{n+1}), y_{n+1}), f(x, y_{n+1})) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc d'après (5') et (5'') on a bien que $y_{n+1} \in W_{n+1}$ et d'après ce qui précède σ définit une stratégie licite pour β .

L'espace Y étant β -défavorable pour \mathcal{J}' il existe une partie compatible avec σ et gagnée par α . Fixons une telle partie $(\langle V_k \rangle_{k \in \mathbb{N}}; \langle y_k \rangle_{k \in \mathbb{N}})$ et soit

$$y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \cap \overline{\{y_k; k \in \mathbb{N}\}}.$$

Considérons alors la fonction $\varphi = f(., y)$ et la partie $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ de X . Alors pour tout $x \in A$ et tout voisinage U de x on peut trouver un entier k tel que

$$x \in A_k \quad \text{et} \quad B_k(x) \subset U.$$

Comme $W_n \subset W_k$ pour $n \geq k$, il découle alors de (5) que :

$$\forall n \geq k, \quad d(f(\pi_k(x, y_k), y_n), f(x, y_n)) > \frac{\varepsilon}{2}$$

et par la continuité de f en Y on déduit par passage à la limite que

$$d(\varphi(\pi_k(x, y_k)), \varphi(x)) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc l'oscillation de φ sur tout ouvert relatif non vide de A est $\geq \varepsilon/2$, ce qui contredit l'hypothèse que φ est de première classe et achève la démonstration du lemme.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. Revenons maintenant à la démonstration du Théorème 1. Il suffit évidemment de montrer que l'ensemble $\text{Cont}(f)$ est non vide.

Remarquons tout d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout ouvert $U \times V$ non vide de $X \times Y$ on peut trouver d'après le lemme et la définition de $G_\varepsilon(V)$ un ouvert non vide U' de X tel que

$$\emptyset \neq U' \subset U \cap G_\varepsilon(V)$$

et

$$\emptyset \neq V' = V \setminus \overline{H_\varepsilon(U')}.$$

Posons $U' \times V' = \rho_\varepsilon(U \times V)$; ceci définit une stratégie pour le joueur β dans $\mathcal{J}(X \times Y)$ par

$$\begin{cases} U_0 \times V_0 = X \times Y \\ U_{2n+2} \times V_{2n+2} = \rho_{1/n}(U_{2n+1} \times V_{2n+1}). \end{cases}$$

L'espace $X \times Y$ étant de Baire il existe une partie de $\mathcal{J}(X \times Y)$ compatible avec ρ qui soit gagnée par α . Soit $(U_n \times V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une telle partie; alors tout point $(x_0, y_0) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \times V_n$ est un point de continuité de f .

En effet, fixons $\varepsilon > 0$ et soit V un voisinage de y_0 tel que $V \subset V_n$ et $\text{diam } f(\{x_0\} \times V) \leq \varepsilon$, avec $1/(n-1) < \varepsilon$, alors pour tout $(x, y) \in U_n \times V$ on

$$d(f(x, y), f(x_0, y_0)) \leq d(f(x, y), f(x_0, y)) + d(f(x_0, y), f(x_0, y_0)) \leq 2\varepsilon$$

puisque pour tout $y \in V_n$ on a que $\text{diam}(f(U_n \times \{y\})) \leq 1/(n-1)$, d'après la définition même de $H_\varepsilon(U_n)$.

REMARQUES.

1. Soient X et Y deux espaces de Baire; il découle alors des propriétés rappelées précédemment que:

- (1) Si X est à base dénombrable alors les conditions (a) et (c) sont vérifiées.
- (2) Si X est un espace métrique complet alors les conditions (a) et (c) sont vérifiées.
- (3) Si Y est un espace métrique complet alors les conditions (b) et (c) sont vérifiées.
- (4) Si Y est un espace localement compact alors les conditions (b) et (c) sont vérifiées.
- (5) Si X et Y sont métrisables alors les conditions (a) et (b) sont vérifiées.

2. Même pour $X = Y = [0, 1]$ il est faux en général que sous les hypothèses du théorème, la fonction f soit de première classe sur $X \times Y$. En effet, il est facile de construire pour toute fonction $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de deuxième classe de Baire, une fonction $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de première classe en l'une des variables et continue en l'autre telle que $f(x, x) = \varphi(x)$ pour tout x .

3. Si on suppose seulement que f est séparément de première classe, le théorème devient faux. En effet, il existe par l'axiome du choix une partie A de $[0, 1] \times [0, 1]$ qui est dense ainsi que son complémentaire, et qui rencontre chaque verticale et chaque horizontale en un point seulement. La fonction caractéristique d'une telle partie est donc séparément semi-continue supérieurement, et ne possède aucun point de continuité dans le carré. Cependant signalons le résultat suivant établi dans [3]

THÉORÈME 2. *Si X et Y sont deux espaces de Baire à base dénombrable et $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement en l'une des variables et semi-continue supérieurement en l'autre, alors il existe deux résiduels G et H de X et Y respectivement tel que $\text{Cont}(f) \supset G \times H$.*

BIBLIOGRAPHIE

1. G. Choquet, *Lectures on analysis*, I, W. A. Benjamin Inc., New York, Amsterdam, 1969.
2. J. P. R. Christensen, *Joint continuity of separately continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), 455–461.
3. G. Debs, *Points de continuité d'une fonction séparément continue*, Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), 167–176.
4. W. G. Fleissner et K. Kunen, *Barely Baire spaces*, Fund. Math. 101 (1978), 229–240.

5. J. C. Oxtoby, *The Banach-Mazur game and Baire category theorem*, in: *Contributions to the theory of games*, III, pp. 159–163. (Ann. of Math. Studies 39), Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957.
6. J. Saint Raymond, *Jeux topologiques et espaces de Namioka*, Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983), 499–504.
7. M. Talagrand, *Propriété de Baire et propriété de Namioka*, Math. Ann. 270 (1985), 159–174.

EQUIPE D'ANALYSE
UNIVERSITÉ PARIS 6 TOUR 46
4, PLACE JUSSIEU
75230 - PARIS CEDEX 05
FRANCE