

MEILLEURES ESTIMATIONS ASYMPTOTIQUES DES RESTES DE LA FONCTION SPECTRALE ET DES VALEURS PROPRES RELATIFS AU LAPLACIEN

PHAM THE LAI

§ 0. Introduction.

Dans ce travail, nous donnons les meilleures estimations asymptotiques des restes de la fonction spectrale et des valeurs propres de l'opérateur de Dirichlet relatif au laplacien

$$\Delta = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

dans un domaine borné Ω de classe C^∞ de \mathbb{R}^n .

Ce travail est nettement influencé par le papier récent de R. Seeley [11] dans lequel l'auteur a établi la meilleure estimation asymptotique du reste des valeurs propres *lorsque* $n=3$:

$$N(\lambda) = \frac{|\Omega|}{6\pi^2} \lambda^{\frac{3}{2}} + O(\lambda) \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

où $N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1$ le nombre des valeurs propres $\leq \lambda$ et $|\Omega|$ la mesure de Ω .

Nous prouvons dans ce travail le résultat général pour $n \geq 1$:

$$(0.1) \quad N(\lambda) = (2\pi)^{-n} \omega_n |\Omega| \lambda^{\frac{n}{2}} + O(\lambda^{\frac{1}{2}(n-1)}) \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

où ω_n est la mesure de la boule unité de \mathbb{R}^n .

Notre résultat unifie donc un grand nombre de travaux antérieurs consacrés à ce sujet: en effet (0.1) est essentiellement connu pour $n=1$ (cf. B. Levitan - I. S. Sargsjan [9]) et aussi pour $n=2$ (cf. V. Babich - B. Lévitane [2]).

Pour des opérateurs elliptiques généraux à coefficients variables, le résultat est établi par L. Hörmander [7] dans le cas d'une variété Ω compacte sans bord, mais le problème général reste ouvert pour le cas à bord.

Nous utilisons la méthode des équations des ondes, inaugurée depuis longtemps par B. Levitan [8] et reprise par R. Seeley [11]. Dans ce dernier

travail, pour obtenir (0,1) pour $n=3$, R. Seeley a montré que, dans la description de la phase, il suffit de ne tenir compte, parmi les ondes réfléchies, que de celles issues de la première réflexion. Cela reste encore vraie pour n quelconque. Cependant les équations des termes de transport décrites dans [11] sont spécifiques à la dimension 3 (la méthode de Seeley ne marche pas par exemple pour la dimension 2); nous proposons dans ce travail d'autres équations de transport qui sont valables pour toutes les dimensions et qui semblent plus naturelles.

Une grande partie de notre travail est consacrée à l'étude du reste de la fonction spectrale (sur la diagonale):

$$r(y, y, \lambda) = e(y, y, \lambda) - (2\pi)^{-n} \omega_n \lambda^{\frac{1}{2}n} \quad y \in \Omega .$$

L. Hörmander [7] a prouvé que:

$$r(y, y, \lambda) = O(\lambda^{\frac{1}{2}(n-1)})$$

uniformément sur tout compact $K \subset\subset \Omega$ et J. Brüning [3] l'a amélioré en prouvant que:

$$(0.2) \quad r(y, y, \lambda) = O(\delta_y^{-1} \lambda^{\frac{1}{2}(n-1)})$$

uniformément sur Ω , ($\delta_y = \text{dist}(y, \Gamma)$ où est le bord de Ω).

Le résultat (0.2) est dans un certain sens le meilleur possible. Nous montrons ici qu'en ajoutant à $r(y, y, \lambda)$ un *terme oscillant* (provenant de la première réflexion sur le bord) nous pouvons *améliorer le reste* donné par (0.2).

Ce terme oscillant est:

$$(0.3) \quad e_0(y - y^*, \lambda)$$

où $e_0(x - y, \lambda)$ est la fonction spectrale de $-\Delta$ dans l'espace entier \mathbb{R}^n et y^* est l'image réfléchie de y à travers le miroir Γ .

En terme de fonction de Bessel, ce terme s'écrit:

$$(0.3') \quad (2\pi)^{-n} \frac{\omega_n}{\mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(0)} \int_0^{\sqrt{\lambda}} \mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(2\delta_y \sigma) d\sigma^n$$

où $\mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}$ est la fonction entière associée à la fonction de Bessel $J_{\frac{1}{2}n-1}$:

$$\mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^{-\frac{1}{2}n+1} J_{\frac{1}{2}n-1}(z) .$$

Le résultat précis est décrit au théorème 4.4 du § 4 qui est le résultat essentiel de notre travail.

Il est ensuite facile d'obtenir (0.1) à partir du théorème 4.4.

Le terme oscillant (0.3) redonne un résultat connu pour $n=1$, mais il semble, à notre connaissance, que le résultat général du théorème 4.4 n'est pas connu, même pour la dimension 2 ou 3.

A l'aide de (0.3), il est raisonnable de conjecturer que le reste:

$$R(\lambda) = N(\lambda) - (2\Pi)^{-n} \omega_n |\Omega| \lambda^{\frac{1}{2}n}$$

a un comportement asymptotique donné par la formule (pour $n \geq 2$):

$$R(\lambda) = d_n \lambda^{\frac{1}{2}(n-1)} + o(\lambda^{\frac{1}{2}(n-1)}) \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

avec:

$$d_n = - (2\Pi)^{-n} \frac{n \omega_n |\Gamma|}{2(n-1) \mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(0)} \int_0^\infty \mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(t) dt = - (2\Pi)^{-(n-1)} \frac{\omega_{n-1}}{4} |\Gamma|$$

avec $|\Gamma|$ = mesure du bord Γ de Ω .

Les constantes d_3, d_2 sont conjecturées depuis longtemps par H. Weyl.

Nous espérons y revenir prochainement.

Nous remercions le référé pour les commentaires à ce sujet.

Ce travail est le texte détaillé d'une note publiée aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris (C.R. Acad. Sci., t. 289, Série A) et d'une conférence donnée aux Journées Equations aux Dérivées Partielles à Saint Cast, juin 1979.

REMARQUE. Pour le problème de Neumann, on a un résultat de même nature: le terme oscillant à ajouter à $r(y, y, \lambda)$ est l'opposé du terme (0.3).

Le plan de ce travail est le suivant:

- § 1. La transformation cosinus.
 - § 2. Le laplacien dans \mathbb{R}^n .
 - § 3. Propriétés asymptotiques du noyau de l'opérateur de Huyghens.
 - § 4. Comportement asymptotique de la fonction spectrale.
- Appendices A et B.

§ 1. La transformation cosinus.

Soit E_λ la projection orthogonale sur la somme des espaces propres correspondant aux valeurs propres $\lambda_i \leq \lambda$. Alors

$$E_\lambda f(x) = \int_\Omega e(x, y, \lambda) f(y) dy$$

où $e(x, y, \lambda)$ est le noyau de E_λ , appelé fonction spectrale de Δ_D .

Il est bien connu (cf. S. Agmon [1]) que l'on a:

$$(1.1) \quad e(x, x; \lambda) \leq C \lambda^{\frac{1}{2}n}.$$

La transformation cosinus de la mesure dE_λ est par définition l'opérateur:

$$H(t) = \int_0^\infty \cos t\sqrt{\lambda} dE_\lambda, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Il est clair que $H(t) \in \mathcal{B}(L^2(\Omega))$ et la fonction $H: t \mapsto H(t)$ est une fonction paire en t , continue par rapport à t . H est appelé la transformée cosinus de dE_λ .

Pour $f \in \mathcal{D}(\Delta_D)$, l'unique solution du problème dit de Huyghens:

$$\partial_t^2 u + \Delta u = 0 \quad t > 0$$

$$u(t, x) \in \mathcal{D}(\Delta_D) \quad t \geq 0$$

$$u(0, x) = f(x)$$

$$\partial_t u(0, x) = 0$$

est donnée par $u(t, x) = (H_t f)(x)$ pour $t \geq 0$.

Le noyau distribution de $H(t)$, noté $H(x, t, y)$, est formellement donné par la formule:

$$(1.2) \quad H(x, t, y) = \int_0^\infty \cos t\sqrt{\lambda} de(x, y; \lambda), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Pour x, y fixés dans Ω , il est facile de voir, d'après (1.1), que $de(x, y; \lambda)$ est une mesure à croissance polynomiale et par conséquent l'intégrale au second membre de (1.2) n'a pas de sens au sens ordinaire. Le sens de (1.2) est le suivant: la fonction H de $\mathbf{R} \rightarrow \mathcal{B}(L^2(\Omega))$ définit une distribution $H \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbf{R}), \mathcal{B}(L^2(\Omega)))$, dont l'action sur chaque fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ est donnée par:

$$(1.3) \quad \langle H \cdot \varphi \rangle = \int_0^\infty \tilde{\varphi}(\sqrt{\lambda}) dE_\lambda$$

si l'on note par $\tilde{\varphi}$ la transformée cosinus de φ :

$$(1.4) \quad \tilde{\varphi}(\tau) = \int_{\mathbf{R}} \cos(\tau t) \varphi(t) dt.$$

Il sera commode de noter $\langle H \cdot \varphi \rangle = H_\varphi$.

Si $H_\varphi(x, y)$ est le noyau distribution de l'opérateur H_φ , (1.3) donne:

$$(1.2)' \quad H_\varphi(x, y) = \int_{\mathbf{R}} \tilde{\varphi}(\sqrt{\lambda}) de(x, y; \lambda).$$

Ainsi (1.2) a la signification suivante: $H(x, t, y)$ est une distribution $\in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbf{R}), \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega))$ dont la valeur sur chaque $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ est donnée par (1.2)'.
Comme E_λ est régularisant, H_φ l'est aussi pour tout φ et par conséquent le noyau $H_\varphi(x, y)$ est $C^\infty(\Omega \times \Omega)$.

La distribution $\varphi \mapsto H_\varphi(x, y)$ appartenant à $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega))$ sera notée $H(x, t, y)$.

Il sera commode d'exprimer H_t comme une transformation de Fourier. Notons

$$(1.5) \quad M_\tau = E_{|\tau|^2} \operatorname{sgn} \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Il est alors aisé de voir que l'on a :

$$(1.6) \quad H(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau} dM_\tau, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$H\varphi = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\tau) dM_\tau, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$\hat{\varphi}$ est la transformée de Fourier de φ :

$$\hat{\varphi}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau} \varphi(t) dt.$$

Pour la suite, nous rappelons maintenant la notion de solution faible du problème de Huyghens, telle qu'utilise H. Garnir [5] par exemple.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\Delta_D))$ une distribution à valeur dans $\mathcal{D}(\Delta_D)$, nulle sous 0, c'est-à-dire que $u_\varphi = 0$ lorsque $\operatorname{supp} \varphi \subset]-\infty, 0[$.

On dit que u est solution faible du problème de Huyghens de second membre f si :

$$(1.7) \quad u_{\varphi''} + \Delta u_\varphi = -f\varphi'(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Il est clair que ce problème a une solution unique donnée par :

$$(1.8) \quad u: \varphi \mapsto u_\varphi = \int_0^\infty \varphi(t) H(t) f dt$$

c'est-à-dire que la solution faible u est en fait une solution forte égale à :

$$Y(t)H(t)f, \quad t \in \mathbb{R}$$

où Y est la fonction d'Heaviside.

Notons donc par F la fonction :

$$(1.9) \quad F(t) = Y(t)H(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

et nous appelons F la transformée de Huyghens de la mesure dE_λ .

Comme H est paire, il vient immédiatement :

$$(1.10) \quad H_\varphi = F_\varphi + F_{\check{\varphi}}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}); \quad \check{\varphi}(x) = \varphi(-x).$$

Il est à remarquer que, contrairement à H_φ , F_φ n'est pas régularisant et le

noyau $F_\varphi(x, y)$ de F_φ est seulement C^∞ dans le complémentaire de la diagonale. La distribution $\varphi \mapsto F_\varphi(x, y)$ est notée $F(x, t, y)$.

§ 2. Le laplacien dans \mathbb{R}^n .

L'opérateur Δ , de domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$, est noté encore par Δ et soit E_λ^n la famille spectrale relative à Δ . Son noyau est donné explicitement par la formule bien connue:

$$(2.1) \quad e^n(x, y; \lambda) = (2\pi)^{-n} \int_{|\xi|^2 < \lambda} e^{i(x-y)\xi} d\xi.$$

Soit H^n, F^n les distributions définies au § 1, relatives à Δ .

Nous allons ici exprimer F^n en fonction de G^n , l'opérateur de Green pour l'équation des ondes: G^n est par définition une distribution $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n)))$ vérifiant:

$$(2.2) \quad \begin{cases} G^n \text{ est nulle sous } 0 \\ G_\varphi^n f \in H^2(\mathbb{R}^n) \\ G_\varphi^n f + \Delta G_\varphi^n f = f\varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), f \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Il est bien connu que l'on a:

$$(2.3) \quad F_\varphi^n = -G_\varphi^n, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, G_φ^n a un noyau C^∞ dans le complémentaire de la diagonale donné par (cf. H. G. Ganir [5, page 191]):

$$(2.4) \quad G_\varphi^n(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} p = \alpha} \hat{\phi}(p) E^n(|x-y|; p) dp, \quad \alpha > 0, x \neq y$$

où, dans le second membre de (2.4), nous avons noté $E^n(|x-y|; p)$ le noyau de la résolvante $(\Delta + p^2)^{-1}$, $\operatorname{Re} p > 0$, et $\hat{\phi}$ la transformée de Laplace de φ :

$$(2.5) \quad \hat{\phi}(p) = \int e^{pt} \varphi(t) dt, \quad p \in \mathbb{C}.$$

L'intégrale du second membre de (2.4) ne dépend pas de $\alpha > 0$ en vertu du théorème de Cauchy.

On a donc d'après (2.3):

$$(2.3)' \quad F_\varphi^n(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} p = \alpha} \hat{\phi}(p) p E^n(|x-y|; p) dp.$$

En fonction des fonctions de Bessel K_μ , $\mu \in \mathbb{C}$, ce noyau est donné par:

$$(2.6) \quad E^n(|x-y|; \mu) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} p^{\frac{1}{2}n-1} |x-y|^{1-\frac{1}{2}n} K_{\frac{1}{2}n-1}(p|x-y|), \quad n \geq 1.$$

Notons:

$$(2.7) \quad \mathcal{K}_\mu(z) = (\frac{1}{2}z)^{-\mu} K_\mu(z).$$

Il est bien connu que, pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, \mathcal{K}_μ est une fonction entière.

En fonction de \mathcal{K}_μ , nous obtenons de (2.3)', (2.4), (2.7):

$$(2.8) \quad F_\varphi^n(x, y) = \frac{\gamma_n}{2\pi i} \int_{\text{Re } p = \alpha} \hat{\phi}(p) p^{n-1} \mathcal{K}_{\frac{1}{2}n-1}(|x-y|) dp$$

avec $\gamma_n = 2^{-n+1} \pi^{-\frac{1}{2}n}$.

Pour $\mu > -\frac{1}{2}$ et $\text{Re } z > 0$, il est bien connu que $\mathcal{K}_\mu(z)$ est donné par l'intégrale:

$$(2.9) \quad \mathcal{K}_\mu(z) = \Gamma(\frac{1}{2}) \int_1^\infty e^{-zt} \frac{(t^2-1)^{\mu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} dt.$$

Notons $z = \alpha + i\eta$, $\alpha > 0$. En notant $\mathcal{H}_n(z) = z^{n-1} \mathcal{K}_{\frac{1}{2}n-1}(z)$, la fonction de η :

$$\eta \mapsto \mathcal{H}_n(\alpha + i\eta)$$

considérée comme distribution sera notée $\mathcal{H}_n(\alpha + i \cdot)$.

D'après (2.9), la théorie des distributions valeur aux bords d'une fonction holomorphe montre que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{H}_n(\alpha + i \cdot)$ existe dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On la note par v.b. \mathcal{H}_n .

Notons par $F^n(x, t, y)$ la distribution $\in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n))$ définie par $\varphi \mapsto F_\varphi^n(x, y)$. Comme le noyau $F_\varphi^n(x, y)$ est C^∞ dans le complémentaire de la diagonale, pour $x \neq y$ fixés, la distribution scalaire $F^n(x, t, y)$ a une transformation de Fourier donnée par le:

LEMME 2.1. Pour $x \neq y$, on a:

$$(2.10) \quad [\mathcal{F} F^n(x, \cdot, y)](\tau) = \frac{\gamma_n}{|x-y|^{n-1}} \text{ (v.b. } \mathcal{H}_n)(|x-y|\tau).$$

PREUVE. D'après (2.8) on a:

$$F_\varphi^n(x, y) = \frac{\gamma_n}{2\pi i |x-y|^{n-1}} \int_{\text{Re } p = \alpha} \hat{\phi}(p) |x-y| p^{n-1} \mathcal{K}_{\frac{1}{2}n-1}(|x-y|p) dp \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Il suffit, pour obtenir (2.10), de faire tendre $\alpha \rightarrow 0$ dans l'intégrale du second membre de l'expression précédente en tenant compte du fait que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \hat{\phi}(\alpha + i \cdot) = \mathcal{F} \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et de l'existence de la limite $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{H}_n(\alpha + i \cdot)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Le noyau $H^n(x, y)$ est obtenu, de (1.10), par:

$$(2.11) \quad H_\varphi^n(x, y) = F_\varphi^n(x, y) + F_{\bar{\varphi}}^n(x, y).$$

On va voir que ce noyau peut être exprimé très simplement par l'intermédiaire des fonctions de Bessel de première espèce J_μ :

$$(2.12) \quad J_\mu(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r! \Gamma(\mu + r + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\mu + 2r}$$

ou plutôt de la fonction entière associée:

$$(2.12)' \quad \mathcal{J}_\mu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^{-\mu} J_\mu(z).$$

En notant $H^n(x, t, y)$ la distribution $\varphi \mapsto H_\varphi^n(x, y)$, alors pour tout x et y fixés dans \mathbf{R}^n , la distribution scalaire $\mathcal{F}H^n(x, \cdot, y)$ est donné par le:

LEMME 2.2. Soit $x, y \in \mathbf{R}^n$. On a:

$$(2.13) \quad [\mathcal{F}H^n(x, \cdot, y)](\tau) = \pi \gamma_n |\tau|^{n-1} \mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(|x-y|\tau).$$

PREUVE. C'est équivalent à prouver que, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, on a:

$$(2.13)' \quad H_\varphi^n(x, y) = \frac{\gamma_n}{2} \int_{\mathbf{R}} |\eta|^{n-1} \mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(|x-y|\eta) \bar{\mathcal{F}}\varphi(\eta) d\eta.$$

Pour $\mu \notin \mathbf{Z}$, on sait que \mathcal{K}_μ s'exprime en fonction de \mathcal{J}_μ :

$$(2.14) \quad \mathcal{K}_\mu(z) = -\frac{\pi}{2 \sin \mu\pi} \left[\mathcal{J}_\mu(iz) - \left(\frac{z}{2}\right)^{-2\mu} \mathcal{J}_{-\mu}(iz) \right], \quad -\frac{n}{2} < \arg z \leq \frac{n}{2}$$

(pour $\mu \in \mathbf{Z}$, \mathcal{K}_μ peut être obtenu par passage à la limite de la formule précédente).

Il en résulte que l'on a, pour $\mu \notin \mathbf{Z}$:

$$z^{2\mu+1} \mathcal{K}_\mu(z) = -\frac{\pi}{2 \sin \mu\pi} [z^{2\mu+1} \mathcal{J}_\mu(iz) - 2^{-2\mu} z \mathcal{J}_{-\mu}(iz)] - \frac{n}{2} < \arg z \leq \frac{n}{2}.$$

En utilisant la distribution $(\eta - i\cdot)^\mu$ définie pour tout μ (cf. Guelfand–Chilov [6], page 58), nous avons évidemment:

$$(v.b. z^{2\mu+1})(\eta) = e^{(2\mu+1)i\frac{1}{2}\pi} (\eta - i0)^{2\mu+1}.$$

En fonction des distributions η_+^μ, η_-^μ définies pour $\mu \neq -1, -2, \dots$ (cf. loc. cité), on a pour $\mu = \frac{1}{2}n - 1$:

$$(v.b. z^{n-1})(\eta) = e^{i(n-1)\frac{1}{2}\pi} \eta_+^{n-1} + e^{-i(n-1)\frac{1}{2}\pi} \eta_-^{n-1}.$$

Comme les fonctions $\mathcal{J}_\mu, \mathcal{J}_{-\mu}$ sont entières et paires, il vient:

$$(2.15) \quad (\text{v.b. } \mathcal{H}_n)(\eta) = -\frac{\pi}{2 \sin(\frac{1}{2}n - 1)\pi} \\ \{ [e^{i(n-1)\frac{1}{2}\pi} \eta_+^{n-1} + e^{-i(n-1)\frac{1}{2}\pi} \eta_-^{n-1}] \mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(\eta) - 2^{-2n+2} i \eta \mathcal{J}_{\frac{1}{2}n+1}(\eta) \}$$

pour n impair.

Grâce encore à la parité de \mathcal{J}_μ et $\mathcal{J}_{-\mu}$, nous obtenons de (2.15):

$$(2.16) \quad (\text{v.b. } \mathcal{H}_n)(\eta) + (\text{v.b. } \mathcal{H}_n)(-\eta) = \pi |\eta|^{n-1} \mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(\eta).$$

Il est clair que (2.16) est encore vraie pour n pair.

Alors (2.10), (2.11) et (2.16) donnent (2.13)', d'où le lemme.

REMARQUE. En utilisant (1.2)', on peut aussi, plus facilement, établir (2.13), en utilisant (2.1) et le fait que $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}$.

Par contre, l'utilisation de (1.9) qui définit F_φ^n ne conduit pas immédiatement à (2.10).

§ 3. Propriétés asymptotiques du noyau de l'opérateur de Huyghens F_\cdot .

3.1. Description des termes asymptotiques.

Nous allons étudier les singularités du noyau $F(x, t, y)$.

Il est clair que le terme principal de $F(x, t, y)$ est $F^n(x, t, y)$ étudié au § 2. La correction $F(x, t, y) - F^n(x, t, y)$ sera obtenue par l'étude de l'onde réfléchie au bord de Ω . R. Seeley l'a faite pour la dimension 3, nous modifions sa méthode pour résoudre le cas n quelconque.

Un chemin issu de $y \in \Omega$ est dit un rayon de réflexions multiples si son trajet est décrit comme un rayon lumineux se réfléchissant au moins une fois sur le bord Γ de Ω suivant les lois de l'optique géométrique. Un rayon de réflexions multiples est dit un *rayon réfléchi* s'il n'y a qu'une seule réflexion.

Si $x \in \Omega$ est sur le trajet d'un rayon réfléchi issu de y , on note

$$(3.1) \quad s(x, y) = \text{la longueur du trajet de } y \text{ à } x.$$

Soit Ω_0 un ouvert de la forme $\Omega \cap \mathcal{O}_0$ (\mathcal{O}_0 ouvert de \mathbf{R}^n), domaine d'une carte locale. On notera $\underline{\Omega}_0 = \bar{\Omega} \cap \mathcal{O}_0$.

Le résultat suivant de R. Seeley montrera que l'on n'a besoin que des *rayons réfléchis*. Il a été prouvé pour $n=3$ mais la preuve est valable pour tout n .

LEMME 3.1. *Il existe $\varkappa > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in \Omega_0 \times \Omega_0$, on a: parmi tous les rayons de réflexions multiples issus de y et joignant x dont la longueur du trajet est $\leq \varkappa [\text{dist}(y, \Gamma)]^{\frac{1}{2}}$, il n'y a que des rayons réfléchis.*

Ce lemme est précisé par le:

LEMME 3.2. Si la constante \varkappa du lemme 3.1 est suffisamment petite, pour tout $y \in \Omega_0$ et $x \in \Omega_0$ vérifiant $|x-y| \leq \varkappa \delta_y^{\frac{1}{2}}$, il existe un seul rayon réfléchi de longueur $\leq \varkappa \delta_y^{\frac{1}{2}}$ joignant y à x et ce rayon est transverse.

PREUVE. D'après le lemme 3.1, s'il existe un rayon de réflexions multiples joignant y à x de longueur $\leq \varkappa \delta_y^{\frac{1}{2}}$, ce rayon est un rayon réfléchi. Ce rayon ne peut être un rayon rasant (glancing ray) car on vérifie facilement que la longueur du trajet serait $\geq C \delta_y^{\frac{1}{2}}$ avec C une constante ne dépendant que de Ω . Il suffit donc de prendre $\varkappa < C$ pour exclure les rayons rasants.

La propriété de transversalité montre que ce rayon, s'il existe, réalise la plus courte distance joignant y à x en passant par un point \bar{x} du bord et l'existence et l'unicité d'un tel rayon est vraie si la carte locale Ω_0 est suffisamment près du bord.

Ainsi le lemme 3.2 montre que pour $y \in \Omega_0$, $s(x, y)$ est bien définie pour x vérifiant $|x-y| \leq \varkappa \delta_y^{\frac{1}{2}}$.

Pour ω une boule ouverte $\subset\subset \Omega_0$, nous désirons étudier la différence $F(x, t, y) - F^n(x, t, y)$ dans $\omega \times]-\infty, \varkappa \delta^{\frac{1}{2}}] \times \omega$, avec $\delta = \text{dist}(\omega, \Gamma)$.

La propriété de propagation à vitesse finie amène à ne considérer que des rayons de réflexions (multiples) de longueur $\leq \varkappa \delta^{\frac{1}{2}}$; d'après le lemme 3.1 ces rayons sont des rayons réfléchis.

Nous étudions donc cette différence sous la forme:

$$(3.2) \quad F(x, t, y) - F^n(x, t, y) \sim \alpha_n(x, y) P^n(s(x, y); t) + \alpha_{n-2} P^{n-2}(s; t) + \dots \\ + \alpha_{n-2l} P^{n-2l}(s; t) + \dots$$

sous le temps $t < k \delta^{\frac{1}{2}}$ où, pour $k \leq n$, nous notons:

- (i) $P^k(s(x, y); t)$ est un terme (de phase) défini par la distribution (en t), dépendant d'un paramètre $s > 0$, notée $P^k(s; t)$:

$$(3.3)_k \quad \varphi \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re } p = \alpha} \hat{\varphi}(p) p E^k(s; p) dp, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

avec:

$$(3.4) \quad E^k(s; p) = \gamma_k p^{k-1} \mathcal{H}_{\frac{1}{2}k-1}(sp) \quad \gamma_k = 2^{-k+1} \pi^{-\frac{1}{2}k};$$

- (ii) $\alpha_k(x, y)$ est un terme de transport, qui est une fonction séparément C^∞ des deux variables à déterminer.

Vu (3.3)_k, il est clair que, pour x, y fixés, la distribution scalaire $P^k(s(x, y); t)$ a une singularité décroissante lorsque k décroît.

Pour déterminer les équations de transport gouvernant les α_k , notons:

$$(3.5) \quad V^k(x, y; p) = \alpha_k(x, y) E^k(s(x, y); p).$$

Il est établi à l'appendice A que $E^k(s; p)$, comme fonction de la variable réelle $s > 0$, vérifie l'équation différentielle sur \mathbf{R}^+ :

$$(3.6) \quad \partial_s^2 E^k + \frac{k-1}{s} \partial_s E^k - p^2 E^k = 0, \quad \operatorname{Re} p > 0$$

et l'équation de récurrence:

$$(3.7) \quad \partial_s E^k = -2\pi s E^{k+2}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Il vient, en opérant Δ_x sur $V^k(x, y; p)$ et en tenant compte du fait évident que $|\nabla_x s| = 1$, nous avons:

$$(p^2 + \Delta_x) V^k = 2\pi s \left(2\nabla_x \alpha_k \cdot \nabla_x s - \alpha_k \Delta_x s - \frac{k-1}{s} \alpha_k \right) E^{k+2} + E^k \Delta_x \alpha_k.$$

Il en résulte que, pour m entier ≥ 0 , on a:

$$(3.8) \quad \sum_{l=0}^m (p^2 + \Delta_x) V^{n-2l} = 2\pi s \left(2\nabla_x \alpha_n \nabla_x s - \alpha_n \nabla_x s - \frac{n-1}{s} \alpha_n \right) E^{n+2} + \\ + \sum_{l=0}^{m-1} \left[\Delta_x \alpha_{n-2l} + 2\pi s \left(2\nabla_x \alpha_{n-2(l+1)} \nabla_x s - \alpha_{n-2(l+1)} \Delta_x s + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{n-2l-3}{s} \alpha_{n-2(l+1)} \right) \right] \cdot E^{n-2l} + E^{n-2m} \Delta_x \alpha_{n-2m}.$$

Les équations de transport pour les α^k sont donc:

$$(3.9) \quad 2\nabla_x \alpha_n \nabla_x s - \alpha_n \Delta_x s - \frac{n-1}{s} \alpha_n = 0$$

$$(3.10) \quad 2\nabla_x \alpha_{n-2l} \nabla_x s - \alpha_{n-2l} \Delta_x s - \frac{n-2l-1}{s} \alpha_{n-2l} = -\frac{1}{2\pi s} \Delta_x \alpha_{n-2l+2}$$

pour $1 \leq l \leq m$.

Avec des α^k vérifiant (3.9), (3.10), nous avons de (3.8):

$$(3.11) \quad \sum_{l=0}^m (p^2 + \Delta_x) V^{n-2l} = E^{n-2m} \Delta_x \alpha_{n-2m}.$$

En multipliant les membres de l'égalité précédente par $p\hat{\phi}(p)$ et en intégrant en p sur une droite parallèle à l'axe imaginaire d'abscisse positive, on a:

$$(3.12) \quad \sum_{l=0}^m [\alpha_{n-2l}(x, y) P_\varphi^{n-2l}(s(x, y)) + \Delta_x (\alpha_{n-2l} P_\varphi^{n-2l}(s(x, y)))] \\ = P_\varphi^{n-2m}(s(x, y)) \Delta_x (\alpha_{n-2m}(x, y))$$

ayant noté l'intégrale (3.3)_k par $P_\phi^k(s)$, valeur de la distribution $P^k(s; t)$ sur la fonction test ϕ .

3.2. *Intégration des équations de transport.*

Nous pouvons toujours supposer que la partie $\Gamma_0 = \underline{\Omega}_0 \cap \Gamma$ est telle qu'il existe un système de coordonnées locales orthogonales $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$ telle que $(0, \dots, 0) \in \Gamma_0$ et que Γ_0 soit représentable par:

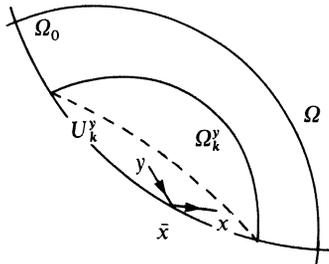
$$(3.13) \quad \Gamma_0 = \{x_n = f(x')\} .$$

Pour $y \in \Omega_0$ et $\kappa > 0$, nous notons (Fig. 1):

$$(3.14) \quad \begin{aligned} U_x^y &= \{x \in \Omega_0 ; |x - y| < \kappa \delta_y^{\frac{1}{2}}\} \\ \Gamma_x^y &= \{x \in \underline{\Omega}_0 \cap \Gamma ; |x - y| < \kappa \delta_y^{\frac{1}{2}}\} \\ \Omega_x^y &= \{x \in U_x^y ; s(x, y) < \kappa \delta_y^{\frac{1}{2}}\} . \end{aligned}$$

On peut montrer facilement que:

Fig. 1.



$$(3.15) \quad \Gamma_x^y = \{\bar{x} ; x \in \Omega_x^y\}$$

ayant noté \bar{x} le point de réflexion sur Γ du rayon réfléchi issu de y et passant par x . On note aussi $\underline{\Omega}_x^y = \Omega_x^y \cup \Gamma_x^y$.

Soit $\delta > 0$. Par ω_δ nous notons une boule $\subset\subset \Omega_0$ telle que:

$$(3.16) \quad \text{diamètre } \omega_\delta = \delta \quad \text{et} \quad \text{dist}(\omega_\delta, \Gamma) = \delta .$$

On note:

$$(3.14)' \quad \Omega_x^\delta = \bigcap_{y \in \omega_\delta} \Omega_x^y ; \quad \Gamma_x^\delta = \bigcap_{y \in \omega_\delta} \Gamma_x^y ; \quad \underline{\Omega}_x^\delta = \Omega_x^\delta \cup \Gamma_x^\delta .$$

On a le:

LEMME 3.3. Si on a :

$$(3.17) \quad \delta \leq \frac{\kappa^2}{72}$$

alors $\omega_\delta \subset \Omega_{\kappa/2}^\delta$.

PREUVE. Soit $z \in \omega_\delta$ et $y \in \omega_\delta$. Notons y_0 le point de Γ tel que $\delta_y = |y - y_0|$. Alors

$$s(z, y) \leq |z - y_0| + \delta_y \leq 2\delta_y + \delta \leq 3\delta_y.$$

Comme $\delta_y \leq 2\delta$, nous avons le résultat car $3\delta_y \leq \kappa/2$.

LEMME 3.4. Dans les hypothèses du lemme 3.3 avec κ suffisamment petit, la fonction $s(x, y)$ est séparément C^∞ des deux variables lorsque $(x, y) \in \underline{\Omega}_x^\delta \times \omega_\delta$.

PREUVE. Il suffit de prouver que pour y fixé dans ω_δ , alors $s(x, y)$ est C^∞ dans $\underline{\Omega}_x$. Cela découlera du fait que tous les rayons réfléchis issus de y et passant par un point de Ω_x sont transversaux.

Ayant fixé $\delta > 0$ vérifiant (3.17) et κ suffisamment petit, nous allons montrer que les α_k sont uniquement déterminées de manière C^∞ , séparément des deux variables, dans $\underline{\Omega}_x^\delta \times \omega_\delta$ si l'on impose les conditions aux limites :

$$(3.9)' \quad \alpha_n(x, y) = -1, \quad x \in \Gamma_x^\delta, \quad y \in \omega_\delta$$

$$(3.10)' \quad \alpha_{n-2l}(x, y) = 0, \quad 1 \leq l \leq m; \quad x \in \Gamma_x^\delta, \quad y \in \omega_\delta.$$

Soit $y \in \omega_\delta$ fixé. Pour $x \in \Omega_x^\delta$, rappelons que \bar{x} est le point de réflexion sur Γ du rayon réfléchi issu de y et passant par x ; on sait que $\bar{x} \in \Gamma_x^\delta$.

Soit $\{t' = (t_1, \dots, t_{n-1}), f(t')\}$ les coordonnées de \bar{x} (avec f définie dans (3.13)).

Alors, on peut prendre (t', s) comme coordonnées locales et l'on note $g = \det j$ où j est le jacobien $j = \partial(x', x_n)/\partial(t', s)$.

La formule suivante est fondamentale et est connue en optique géométrique; elle est prouvée dans R. Seeley pour $n=3$ mais sa preuve est valable pour tout n .

$$(3.18) \quad \Delta_x s = -g^{-1} \frac{\partial g}{\partial s}.$$

Le résultat suivant détermine les α_k :

PROPOSITION 3.5. Pour κ suffisamment petit et δ vérifiant (3.17), pour tout $m \geq 0$, il existe de manière unique des fonctions $\alpha_{n-2l}(x, y)$, $0 \leq l \leq m$, définies sur $\underline{\Omega}_x^\delta \times \omega_\delta$, C^∞ séparément des deux variables, vérifiant les équations de trans-

port (3.9), (3.10)_{n-2l} et les conditions aux limites (3.9)', (3.10)'_{n-2l}, $0 \leq l \leq m$. De plus, il existe $q > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, $x \in \underline{\Omega}_\delta^s$ et $y \in \omega_\delta$:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \alpha_n + 1 &= O\left(\delta_y \left(\frac{s}{\delta_y}\right)^q\right) \\ \alpha_k &= O\left(\delta_y \left(\frac{s}{\delta_y}\right)^q\right) \quad n-2m \leq k \leq n-2 \\ \partial_x^\beta \alpha_k &= O\left(\delta_y^{1-|\beta|} \left(\frac{s}{\delta_y}\right)^q\right) \quad n-2m \leq k \leq n; \quad \forall \beta \text{ multi-indice.} \end{aligned}$$

On a noté dans (3.19) $s = s(x, y)$, \bar{x} le point de réflexion.

PREUVE. Pour utiliser des estimations données par R. Seeley concernant la fonction g , faisons l'homothétie

$$(X', X_n) = \left(\frac{x'}{\delta_y}, \frac{x_n}{\delta_y}\right), \quad (T', S) = \left(\frac{t}{\delta_y}, \frac{s}{\delta_y}\right).$$

Résolvons d'abord le problème (3.9) (3.9)'.

Avec $X = (X', X_n)$, l'équation (3.9) s'écrit dans les coordonnées X :

$$(3.20) \quad 2\nabla_X \alpha_n \nabla_X S - \alpha_n \Delta_X S - \frac{n-1}{S} \alpha_n = 0.$$

Si G est le det J avec $J = \partial(X', X_n) / \partial(T', S)$, alors (3.18) donne:

$$(3.21) \quad \Delta_X S = -G^{-1} \frac{\partial G}{\partial S}.$$

Tenant compte de (3.21), (3.20) s'écrit dans les coordonnées (T', S) :

$$2 \frac{\partial \alpha_n}{\partial S} + G^{-1} \frac{\partial G}{\partial S} \alpha_n - \frac{n-1}{S} \alpha_n = 0.$$

Comme l'on a:

$$\frac{\partial}{\partial S} (G^{\frac{1}{2}} S^{-\frac{1}{2}(n-1)} \alpha_n) = \frac{1}{2} G^{\frac{1}{2}} S^{-\frac{1}{2}(n-1)} \left(2 \frac{\partial \alpha_n}{\partial S} + G^{-1} \frac{\partial G}{\partial S} \alpha_n - \frac{n-1}{S} \alpha_n \right),$$

alors la condition aux limites (3.9)' montre que:

$$(3.22) \quad \alpha_n = - \left(\frac{G(T', R)}{(T', S)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R}{S} \right)^{-\frac{1}{2}(n-1)}$$

où l'on a noté $R = |\bar{x} - y| / \delta_y$.

Comme dans R. Seeley [11, lemme 3] pour la dimension 3, nous pouvons prouver, pour la dimension n , l'estimation:

$$(3.23) \quad \frac{G(0, S)}{G(0, R)} = \left(\frac{S}{R}\right)^{n-1} [1 + O(\delta_y S^2)]$$

avec O indépendant de δ_y .

Alors (3.22) et (3.23) donnent $\alpha_n(0, S) + 1 = O(\delta_y S^q)$ pour $q=2$, car $1 \leq R \leq S$.

Quitte à diminuer la constante \varkappa , nous avons donc (3.19) pour α_n en revenant aux variables $x = (x', x_n)$.

Les dérivations $\partial_{x'}^\beta \alpha_n$ se majorent de la même manière en dérivant (3.23) et donnent, avec un autre nombre q :

$$\partial_{x'}^\beta \alpha_n = O(\delta_y S^q)$$

d'où (3.19) pour les dérivées $\partial_{x'}^\beta \alpha_n$.

Les équations de transport pour les autres termes s'écrivent dans les coordonnées (T', S) , d'après (3.10) $_{n-2l}$, pour $1 \leq l \leq m$:

$$\frac{\partial}{\partial S} (G^\dagger S^{-\frac{1}{2}(n-2l-1)} \alpha_{n-2l}) = -\frac{1}{4\pi} G^\dagger S^{-\frac{1}{2}(n-2l+1)} \Delta_X \alpha_{n-2l+2}.$$

Avec (3.10) $'_{n-2l}$, nous obtenons:

$$(3.23)_{n-2l} \quad \alpha_{n-2l} = -\frac{1}{4\pi S} \int_R^S \left(\frac{g(T', u)}{g(T', S)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{u}{S}\right)^{-\frac{1}{2}(n+2l+1)} \Delta_X \alpha_{n-2l+2} du.$$

Comme $\Delta_X \alpha_n = O(\delta S^q)$, on obtient de (3.23) $_{n-2}$ que:

$$\partial_{x'}^\beta \alpha_{n-2} = O(\delta_y S^q) \quad \forall \beta$$

pour un certain q .

Nous obtenons ainsi des majorations analogues pour tous les autres termes par récurrence.

3.3. Définition des termes asymptotiques sous le temps $\frac{1}{2}\varkappa\delta^\pm$.

Il est commode de noter

$$(3.24) \quad \varkappa_1 = \frac{1}{2}\varkappa.$$

Nous désirons définir les termes asymptotiques figurant au second membre de (3.2) sur $\bar{\Omega} \times]-\infty, \varkappa_1\delta^\pm[\times \omega$, c'est-à-dire *globalement* en x lorsque $y \in \omega_\delta$ et $t < \varkappa_1\delta^\pm$.

Notons, pour $x \in \bar{\Omega}$ et $y \in \omega_\delta$, $R^k(x, t, y)$ la distribution (en t) définie dans $]-\infty, \varkappa_1\delta^\pm[$ par la formule:

$$(3.25) \quad \varphi \mapsto R_\varphi^k(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \bar{\Omega} - \underline{\Omega}_x^\delta \\ \alpha_k(x, y) P_\varphi^k(s(x, y)) & \text{si } x \in \underline{\Omega}_x^\delta \end{cases}$$

pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ vérifiant;

$$(3.26) \quad \text{supp } \varphi \subset]-\infty, \kappa_1 \delta^\pm[$$

(au second membre de (3.25), nous avons noté $P_\varphi^k(s)$ l'action de la distribution $P^k(s; t)$ sur φ).

Comme dans le lemme 3.7 ci-dessous, on montre que la distribution $P^k(s; t)$ est nulle lorsque $t < s$ et par conséquent, pour φ vérifiant (3.26) et $x \in \bar{\Omega}$, $y \in \omega_\delta$ fixés, on a:

$$(3.27) \quad P_\varphi^k(s(x, y)) = 0 \quad \text{si } \text{supp } \varphi \subset]-\infty, s(x, y)[.$$

Grâce à cette propriété, nous allons montrer que, pour $y \in \omega_\delta$:

$$(3.28) \quad \text{la fonction (en } x) R_\varphi^k(x, y) \text{ est identiquement nulle sur un voisinage de } \bar{\Omega} - \bar{\Omega}_x^\delta.$$

En effet, grâce à (3.26), il existe $\varepsilon > 0$ telle que

$$\text{supp } \varphi \subset]-\infty, (\kappa_1 - \varepsilon)\delta^\pm]$$

et il suffit de prouver que $P^k(s, (x, y))$ est nulle si $x \notin \Omega_{x-\varepsilon}^\delta$, $y \in \omega_\delta$.

Comme $x \notin \Omega_{x-\varepsilon}^\delta$, il existe $y_0 \in \omega_\delta$ tel que:

$$s(x, y_0) > (\kappa_1 - \varepsilon)\delta_{y_0}^\pm.$$

Par conséquent:

$$s(x, y) \geq s(x, y_0) - |y - y_0| > (\kappa_1 - \varepsilon)\delta_{y_0}^\pm - \delta \geq ((\kappa_1 - \varepsilon) - \delta^\pm)\delta^\pm.$$

En vertu de (3.17), on vérifie que l'on a $\delta^\pm \leq \kappa_1$, d'où:

$$s(x, y) > (\kappa_1 - \varepsilon)\delta^\pm.$$

Ceci signifie que $\text{supp } \varphi \subset]-\infty, s(x, y)[$ d'où $P^k(s(x, y)) = 0$ grâce à (3.27).

La définition (3.25) et la propriété (3.28) prouvent que:

$$(3.29) \quad \text{Pour } \varphi \text{ vérifiant (3.26), la fonction } R_\varphi^k(x, y) \text{ est séparément } C^\infty \text{ des deux variables, sur } \bar{\Omega} \times \omega_\delta.$$

Notons R_φ^k l'opérateur de noyau $R_\varphi^k(x, y)$ c'est-à-dire:

$$(3.30) \quad R_\varphi^k f = \int_{\Omega} R_\varphi^k(x, y) f(y) dy, \quad f \in \mathcal{D}(\omega_\delta)$$

et d'après (3.29), R_φ^k opère de $\mathcal{D}(\omega_\delta)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$.

Ainsi, sous le temps $t < \kappa_1 \delta^\pm$, nous avons défini la distribution $R^k \in \mathcal{L}(\mathcal{D}]-\infty, \kappa_1 \delta^\pm[, \mathcal{L}(\mathcal{D}(\omega_\delta), C^\infty(\bar{\Omega})))$, notée encore $R^k(t)$.

Les conditions aux limites que vérifient les termes de transport α_k vont donner le:

LEMME 3.6. Pour tout entier $m \geq 1$, nous avons, sous le temps $t < \kappa_1 \delta^{\frac{1}{2}}$:

$$(3.31) \quad \left(F^n(t)f + \sum_{l=0}^m R^{n-2l}(t)f \right) \Big|_{\Gamma} = 0 \quad f \in \mathcal{D}(\omega).$$

PREUVE. Il s'agit de prouver, pour $x \in \Gamma$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ vérifiant (3.26), que l'on a:

$$(3.31)' \quad (F_{\varphi}^n f)(x) + \left(\sum_{l=0}^m R_{\varphi}^{n-2l} f \right)(x) = 0.$$

D'après (3.25), (3.30) et les conditions aux limites (3.10)', nous avons $(\sum_{l=1}^m R_{\varphi}^{n-2l} f)(x) = 0$ et (3.31)' sera une conséquence de:

$$(3.31)'' \quad (F_{\varphi}^n f)(x) + (R_{\varphi}^n f)(x) = 0.$$

Or, si $x \in \Gamma_x^{\delta}$, (3.31)'' est une conséquence de la condition aux limites (3.9)' et du fait que, pour $x \in \Gamma_x^{\delta}$, on a $\lim_{t \rightarrow x} s(t, y) = |x - y|$.

Si $x \notin \Gamma_x^{\delta}$, nous avons, d'après (3.25), $R_{\varphi}^n f(x) = 0$ et il reste à vérifier aussi que:

$$(3.32) \quad (F_{\varphi}^n f)(x) = 0, \quad x \in \Gamma - \Gamma_x^{\delta}.$$

Soit $x \in \Gamma - \Gamma_x^{\delta}$.

On montre, comme pour le lemme 3.3, que l'on a:

$$\text{dist}(\Omega_{\kappa_1}^{\delta}, \bar{\Omega} - \Omega_x^{\delta}) \geq \kappa_1 \delta^{\frac{1}{2}}.$$

En vertu de ce même lemme, on a $\omega_{\delta} \subset \Omega_{\kappa_1}^{\delta}$. Nous obtenons donc $|x - y| \geq \kappa_1 \delta^{\frac{1}{2}}, \forall y \in \omega_{\delta}$. D'après (2.3)', nous obtenons la propriété (3.32) car, d'après la dernière inégalité, nous avons:

$$\text{supp } \varphi \subset]-\infty, |x - y|[.$$

3.4. Noyau compensateur.

Sous le temps $t < \kappa_1 \delta^{\frac{1}{2}}$, le terme compensateur est par définition:

$$(3.33) \quad R(t) = F(t) - \left(F^n(t) + \sum_{l=0}^m R^{n-2l}(t) \right).$$

Son noyau $R(x, t, y)$, appelé noyau compensateur, est donc déterminé, pour chaque fonction test φ vérifiant (3.26):

$$(3.34) \quad R_{\varphi}''(x, y) + \Delta_x R_{\varphi}(x, y) = - \sum_{l=0}^m (R_{\varphi}''^{n-2l}(x, y) + \Delta_x R_{\varphi}^{n-2l}(x, y)),$$

$$x \in \bar{\Omega}, \quad y \in \omega_{\delta}$$

$$(3.34)' \quad R_\varphi(x, y) = 0 \quad x \in \Gamma, y \in \omega_\delta.$$

En effet, (3.34) est une conséquence du fait que, pour $f \in \mathcal{D}(\omega_\delta)$:

$$\begin{aligned} F_{\varphi'} f + \Delta F_\varphi f &= -\varphi'(0)f \quad \text{sur } \Omega \\ F_{\varphi'}^n f + \Delta F_\varphi^n f &= -\varphi'(0)f \quad \text{sur } \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

et (3.34)' est une conséquence de (3.31).

En notant le terme du second membre de (3.34) par $Q_\varphi(x, y)$, nous avons d'après (3.11):

$$(3.35) \quad Q_\varphi(x, y) = \begin{cases} -\Delta_x \alpha_{n-2m} P_\varphi^{n-2m}(s(x, y)) & \text{si } x \in \underline{\Omega}_x^\delta, y \in \omega_\delta \\ 0 & \text{si } x \in \bar{\Omega} - \underline{\Omega}_x^\delta, y \in \omega_\delta. \end{cases}$$

L'entier m est maintenant *choisi égal à*:

$$(3.36) \quad m = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est impair} \\ n+1 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Ce choix va nous permettre de montrer que le noyau compensateur $R(x, t, y)$ a, pour y fixé dans ω_δ , la régularité:

$$R(x, t, y) \in H_{t,x}^{\nu+1, \nu+1}(\]0, \kappa_1 \delta^\pm[\times \Omega)$$

avec:

$$(3.37) \quad \nu = \begin{cases} \frac{1}{2}(n-1) & \text{si } n \text{ impair} \\ \frac{1}{2}n & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

L'espace figurant dans (3.36) est celui défini dans Lions–Magenès pour k et h entiers:

$$H_{t,x}^{k,h}(\]0, T[\times \Omega) = H^k(\]0, T[, L_x^2(\Omega)) \cap L^2(\]0, T[, H_x^h(\Omega)).$$

Comme:

$$(3.38) \quad \nu+1 > \frac{1}{2}n,$$

la régularité exprimée en (3.36) montrera que pour $y \in \omega_\delta$ et pour presque partout t , la fonction en x , $R(x, t, y)$, est continue sur $\bar{\Omega}$: ceci va permettre d'étudier le noyau de $R(t)$ sur la diagonale.

Posons:

$$(3.39) \quad N = 2m - n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ impair} \\ n+2 & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

Nous avons le:

LEMME 3.7. Soit $s > 0$ fixé. La distribution scalaire $P^{-N}(s, t)$ est une fonction (en t) de classe $H_{loc}^v(\mathbb{R})$, nulle dans $] -\infty, s[$.

PREUVE. La distribution $P^{-N}(s, t)$ est définie par (3.3) $_{-N}$.

D'après le comportement asymptotique des fonctions de Bessel K_μ (cf. G. N. Watson [12]), nous avons:

$$K_{-\frac{1}{2}N-1}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z} \left[1 + \frac{R(z)}{z}\right], \quad \text{Re } z > 0$$

où $R(z)$ est un terme borné.

Il en résulte que:

$$(3.40) \quad |pE^{-N}(s, p)| \leq C_{\alpha, s} |e^{-sp}| |p|^{-\frac{1}{2}(N+1)}, \quad \text{Re } p \geq \alpha$$

où $C_{\alpha, s}$ est une constante ne dépendant que de α, s .

Il en résulte que la fonction de t :

$$(3.41) \quad t \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re } p = \alpha} pE^{-N}(s; p)e^{pt} dp$$

(l'intégrale du second membre de (3.41) est indépendante de α) est, grâce à (3.40), une fonction $\varepsilon H_{loc}^v(\mathbb{R})$, comme on le vérifie aisément.

Il est aisé de voir que cette fonction est la distribution $P^{-N}(s, t)$.

Comme, d'après (3.40) encore, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} e^{\theta sp} pE^{-N}(s, p) = 0$ pour $0 \leq \theta < 1$, il est connu (cf. H. G. Garnir [5, par ex. page 168]) que la fonction $P^{-N}(s, t)$ est nulle sur $] -\infty, s[$.

D'après (3.35) et le lemme 3.7, il est naturel de poser, pour $0 \leq t < \kappa_1 \delta^{\frac{1}{2}}$:

$$(3.42) \quad Q(x, t, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \bar{\Omega} - \underline{\Omega}_x^\delta, y \in \omega_\delta \\ -\Delta_x \alpha_{-N} P^{-N}(s(x, y); t) & \text{si } x \in \underline{\Omega}_x^\delta, y \in \omega_\delta \end{cases}$$

Alors en utilisant le lemme 3.4, la proposition 3.5 pour α_{-N} , le lemme 3.7 donne facilement le:

LEMME 3.8. Pour $y \in \omega_\delta$ fixé, la fonction $Q(x, t, y)$ vérifie:

$$Q(x, t, y) \in H_{i, x}^{v, v-1}(\]0, \kappa_1 \delta^{\frac{1}{2}}[\times \Omega)$$

$$\partial_t^j Q(x, 0, y) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq j \leq v-1.$$

Considérons le problème des ondes mixte, dépendant d'un paramètre $\delta > 0$:

$$(3.43) \quad \begin{cases} \partial_t^2 r(t; x) + \Delta_x r = h(t, x) & \text{sur } \]0, \kappa_1 \delta^{\frac{1}{2}}[\times \Omega \\ r(t; x) = 0 & x \in \Gamma, t \in \]0, \kappa_1 \delta^{\frac{1}{2}}[\\ r(0; x) = \partial_t r(0; x) = 0 & x \in \Omega \end{cases}$$

dont le second membre h vérifie les hypothèses :

$$(3.44) \quad \begin{cases} h \in H_{t,x}^{v,v-1}]0, \kappa_1 \delta^\pm[\times \Omega \\ \partial_t^j h(0, x) = 0 \quad 0 \leq j \leq v-1 . \end{cases}$$

Sous les hypothèses (3.42), il est bien connu (cf. Lions–Magenès [10], page 137) que le problème (3.43) a une solution unique :

$$(3.45) \quad r \in H_{t,x}^{v+1,v+1}]0, \kappa_1 \delta^\pm[\times \Omega .$$

Nous aurons besoin des informations quantitatives sur la solution r en fonction du second membre h , avec des *constantes de majorations indépendantes du paramètre δ* .

LEMME 3.9. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\delta > 0$ et tout h vérifiant (3.44), la solution r du problème (3.43), avec second membre h , vérifie pour presque partout $t \in]0, \kappa_1 \delta^\pm[$:*

$$(3.46) \quad \|r(t, \cdot)\|_{H^{v+1}(\Omega)} \leq C \left[\int_0^t \|\partial_t^v h(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} d\tau + \sum_{r=0}^{v-1} \|\partial_t^{v-1-r} h(t, \cdot)\|_{H^r(\Omega)} \right].$$

PREUVE. Pour commodité, notons $r^{(j)}(t, x) = \partial_t^j r(t, x)$. D'après (3.45), les quantités figurant dans (3.46) ont un sens presque partout t . Soit :

$$E_v(t) = \int_{\Omega} (|\nabla r^{(v)}(t, x)|^2 + |r^{(v+1)}(t, x)|^2) dx$$

l'énergie, à l'instant t , de $r^{(v)}$.

Par des arguments standards, on a :

$$(3.47) \quad [E_v(t)]^\pm \leq \int_0^t \|h^{(v)}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} d\tau$$

(on a utilisé la propriété $r(0, \cdot) = r^{(1)}(0, \cdot) = \dots = r^{(v+1)}(0, \cdot) = 0$ qui est une conséquence de l'hypothèse sur h : $h(0, \cdot) = \dots = h^{(v-1)}(0, \cdot) = 0$).

En particulier, on a :

$$(3.48) \quad \|r^{(v)}(t, \cdot)\|_{H^1(\Omega)} \leq C[E_v(t)]^\pm \leq C \int_0^t \|h^{(v)}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} d\tau$$

car $r^{(v)}|_{\Gamma} = 0$.

Utilisant (3.47) et la relation $\Delta r^{(v-1)} + r^{(v+1)} = h^{(v-1)}$, nous obtenons aussi :

$$\|\Delta r^{(v-1)}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq 2 \int_0^t \|h^{(v)}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} d\tau .$$

D'où:

$$(3.49) \quad \|r^{(v-1)}(t, \cdot)\|_{H^2(\Omega)} \leq C \int_0^t \|h^{(v)}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} d\tau$$

car $r^{(v-1)}|_{\Gamma} = 0$.

Alors (3.46) va découler de (3.48) si v est pair et de (3.49) si est impair.

En effet, si v est pair par exemple, nous obtenans de (3.48):

$$\|r^{(v-2)}(t, \cdot)\|_{H^3(\Omega)} \leq C \left[\|h^{(v-2)}(t, \cdot)\|_{H^1(\Omega)} + \int_0^t \|h^{(v)}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} d\tau \right].$$

De là, on obtient des estimations pour $\|r^{(v-4)}(t, \cdot)\|_{H^5(\Omega)}$ et ainsi de suite jusqu'à $\|r(t, \cdot)\|_{H^{v+1}(\Omega)}$.

Si v est impair, nous obtenons de (3.49):

$$\|r^{(v-1)}(t, \cdot)\|_{H^2(\Omega)} \leq C [\|h^{(v-1)}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|h^{(v)}(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} d\tau]$$

et on termine comme ci-dessus.

Pour $y \in \omega_\delta$, notons $r(x, t, y)$ la solution du problème (3.43) avec le second membre $Q(x, t, y)$, défini par (3.42).

D'après le lemme 3.8 et le résultat (3.45), nous avons:

$$(3.50) \quad r(x, t, y) \in H_{t,x}^{v+1, v+1}(\]0, \kappa_1 \delta^{\frac{1}{2}}[\times \Omega), \quad y \in \omega_\delta.$$

LEMME 3.10. *Il existe $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ et $C > 0$ tel que, pour tout $0 < \delta$ vérifiant (3.17), on a:*

$$(3.51) \quad \sup_{y \in \omega_\delta} \int_0^{\kappa_1 \delta^\alpha} \|r(\cdot, \tau, y)\|_{H^{v+1}(\Omega)} d\tau \leq C.$$

PREUVE. Soit $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$. Nous allons voir que l'on peut choisir α suffisamment près de 1 pour que (3.51) soit réalisée.

Pour sa preuve, nous allons noter par C_1, C_2, \dots les différentes constantes qui vont suivre et qui sont toutes indépendantes de δ et de α .

D'après (3.46), on a, en intégrant sur $[0, \kappa_1 \delta^\alpha]$:

$$(3.52) \quad \int_0^{\kappa_1 \delta^\alpha} \|r(\cdot, \tau, y)\|_{H_x^{v+1}} d\tau \leq C_1 \delta^{\frac{1}{2}\alpha} \sum_{r=0}^{v-1} \left(\int_0^{\kappa_1 \delta^\alpha} \|\delta_\tau^{v-1-r} Q(\cdot, \tau, y)\|_{L_x^2}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\ + C_2 \delta^{3\alpha/2} \left(\int_0^{\kappa_1 \delta^\alpha} \|\partial_\tau^v Q(\cdot, \tau, y)\|_{L_x^2}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

pour tout $y \in \omega_\delta$.

D'après (3.42), $\|\partial_\tau^{v-1-r} Q(\cdot, \tau, y)\|_{H^r(\Omega)}^2$ est une somme finie de termes:

$$(3.53) \quad \|D_x^\gamma A_x \alpha_{-N} \partial_t^{\nu-1-r} D_x^\beta P^{-N}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \text{avec } |\gamma| + |\beta| \leq r.$$

En utilisant la relation de récurrence (3.7) pour E^{-N} , un calcul fastidieux mais facile permet de montrer que $\partial_t^j D_x^\beta P^{-N}$ est majorée en module par une somme finie des modules de termes de type :

$$A_{-N}^{|\beta|} |j, h(x, t, y) = \frac{s(x, y)^h}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} p = \alpha} p^{1+j} E^{-N+|\beta|+h}(s(x, y); p) e^{pt} dp, \\ 1 - |\beta| \leq h \leq |\beta|.$$

En utilisant les propriétés asymptotiques des fonctions K_μ comme dans (3.40), on voit que l'expression précédente est de la forme :

$$(3.54) \quad A_{-N}^{|\beta|} |j, h(x; t, y) = C_3 s^{N-|\beta|-j} B\left(\frac{t}{s}\right)$$

où B est une fonction $\in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ nulle sous 0 telle qu'il existe $k > 0$ vérifiant :

$$(3.55) \quad \int_0^\infty (1+\tau)^{-2k} |B(\tau)|^2 d\tau < \infty.$$

En effet, comme dans le lemme 3.7, on montre que B est une fonction $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, nulle sous 0. Comme dans le lemme 2.1, on montre aussi que B est la transformation de Fourier d'une distribution T , valeur au bord d'une fonction holomorphe, et T est, dans le complémentaire de l'origine, une fonction de carré intégrable à l'infini. Ces propriétés montrent que B vérifie (3.55).

En utilisant (3.53), (3.54) et la proposition 3.5 (pour estimer $D_x^\gamma A_x \alpha_{-N}$) nous voyons que $\int_0^{\alpha_1 \delta^\alpha} \|\partial_t^{\nu-1-r} Q(\cdot, \tau, y)\|_{H^r(\Omega)}^2$ est majorée par une somme finie de termes du type :

$$\int_0^{\alpha_1 \delta^\nu} d\tau \int_{s(x, y) \leq \tau} \delta_y^{-2(1+|\gamma|)} \left(\frac{s(x, y)}{\delta_y}\right)^{2q} s(x, y)^{2(N-|\beta|-\nu+r+1)} \left|B\left(\frac{\tau}{s(x, y)}\right)\right|^2 dx, \\ |\gamma| + |\beta| \leq r.$$

Un tel terme est majoré par :

$$(3.56) \quad \int_{|x-y| \leq \alpha_1 \delta^\alpha} dx \int_0^{\alpha_1 \delta^\alpha} (\text{même intégrande}) d\tau, \quad |\gamma| + |\beta| \leq r.$$

Or, d'après (3.55), nous avons :

$$(3.57) \quad \int_0^{\alpha_1 \delta^\alpha} \left|B\left(\frac{\tau}{s}\right)\right|^2 d\tau \leq C_4 s \delta^{-2(1-\alpha)\alpha}.$$

Comme $r \leq \nu - 1$ avec ν défini par (3.37), on a $r + 1 \leq \frac{1}{2}n$ et il est facile alors de voir en utilisant (3.57) que des intégrales de types (3.56) sont majorées par :

$$C_5 \delta^{-(1-\alpha)2k} \delta^{\alpha n} [1 + \delta^{-2(1-\alpha)(n+q)} \delta^{4\alpha}] .$$

Le terme $\int_0^{\kappa_1 \delta^\alpha} \|\partial_\tau^\nu Q(\cdot, \tau, y)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau$ se majore de la même manière; par conséquent, (3.52) donne:

$$\int_0^{\kappa_1 \delta^\alpha} \|r(\cdot; \tau, y)\|_{H^{r+1}(\Omega)} d\tau \leq C_6 \delta^{-(1-\alpha)2k} \delta^{\alpha n} [1 + \delta^{-2(1-\alpha)(n+q)} \delta^{4\alpha}] .$$

Il suffit, pour obtenir le lemme 3.10, de choisir α suffisamment près de 1.

Grâce à (3.34), (3.34)', on vérifie sans peine que le noyau compensateur $R(x, t, y)$ est égal à la fonction:

$$(3.58) \quad \begin{cases} r(x, t, y) & \text{sur } \Omega \times]0, \kappa_1 \delta^\alpha[\times \omega_\delta \\ 0 & \text{sur } \Omega \times]-\infty, 0[\times \omega_\delta . \end{cases}$$

§ 4. Comportement asymptotique de la fonction spectrale.

D'après (1.6), pour tout $x, y \in \Omega$, on a:

$$(4.1) \quad 2H(x, t, y) = \mathcal{F}[dm(x, y, \cdot)](t)$$

si l'on note:

$$(4.2) \quad m(x, y, \tau) = e(x, y, |\tau|^2) \operatorname{sgn} \tau .$$

Soit $\delta > 0$ fixé vérifiant (3.17) et ω_δ une boule $\subset \subset \Omega_0$ vérifiant (3.16).

D'après (1.10), on a $H(t) = F(t) + F(-t)$ d'où, d'après (3.33), nous avons, dans l'ouvert $|t| < \kappa_1 \delta^\alpha$:

$$(4.3) \quad H(t) = H^n(t) + \sum_{-N \leq k \leq n} S^k(t) + S(t)$$

si nous posons dans l'ouvert $|t| < \kappa_1 \delta^\alpha$:

$$(4.4) \quad S^k(t) = R^k(t) + R^k(-t), \quad -N \leq k \leq n ,$$

$$(4.5) \quad S(t) = R(t) + R(-t) .$$

Dans (4.3) et la suite, nous avons pour simplifier noté $\sum_{-N \leq k \leq n}$ une sommation concernant seulement les termes $k = n, n-2, \dots, n-2m = -N$.

Nous avons la:

PROPOSITION 4.1. *Il existe α vérifiant $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, $C > 0$ tels que, pour tout $0 \leq \delta \leq 1$ vérifiant (3.17), tout $x \in \Omega$ et $y \in \omega_\delta$, la distribution scalaire en t , $S(x, t, y)$, définie pour $|t| < \kappa_1 \delta^\alpha$, est dans l'ouvert $|t| < \kappa_1 \delta^\alpha$ une fonction sommable vérifiant:*

$$(4.6) \quad \int_{|t| < \kappa_1 \delta^\alpha} |S(x, t, y)| \leq C .$$

PREUVE. D'après (3.58) et (4.5), $S(x, t, y)$ est la fonction:

$$\begin{cases} r(x, t, y), & 0 < t < \kappa_1 \delta^{\frac{1}{2}}, \\ r(x, -t, y) & -\kappa_1 \delta^{\frac{1}{2}} < t < 0. \end{cases}$$

Alors (4.6) est une conséquence de (3.51) et du théorème de Sobolev qui est applicable car d'après (3.38) $\nu + 1 > \frac{1}{2}n$.

Soit maintenant $\varrho \in \mathcal{S}$ telle que, en notant $\hat{\varrho} = \mathcal{F}\varrho$, l'on a:

$$(4.7) \quad \begin{cases} \varrho \geq 0, \text{ paire, } \varrho(\tau) > 0 & \text{si } |\tau| \leq 1 \\ \hat{\varrho}(0) = 1, \hat{\varrho}(t) \leq 1, \hat{\varrho}(t) = 0 & \text{si } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Une telle fonction existe (voir R. Seeley [11]).

Avec $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ fixé dans la proposition 4.1, notons:

$$(4.8) \quad \varepsilon = \kappa_1 \delta^\alpha$$

$$(4.9) \quad \hat{\varrho}_\varepsilon(t) = \hat{\varrho}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad \varrho^\varepsilon(\tau) = \varepsilon \varrho(\varepsilon\tau).$$

En multipliant les deux membres de (4.3) par $\hat{\varrho}_\varepsilon$, nous obtenons, en opérant la transformation de Fourier inverse, pour $x, y \in \omega_\delta$ fixés:

$$\varrho^\varepsilon * \mathcal{F}^{-1}H = \varrho^\varepsilon * \mathcal{F}^{-1}H^n + \sum_{-N \leq k \leq n} \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varrho}_\varepsilon S^k(x, \cdot, y)) + \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varrho}_\varepsilon S(x, \cdot, y)).$$

D'après (4.1) et une formule analogue pour H^n , on a:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \varrho^\varepsilon * dm(x, y, \cdot) - \frac{1}{2} \varrho^\varepsilon * dm^n(x, y, \cdot) \\ = \sum_{-N \leq k \leq n} \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varrho}_\varepsilon S^k(x, \cdot, y)) + \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varrho}_\varepsilon S(x, \cdot, y)) \end{aligned}$$

où, d'après (2.13), nous avons:

$$(4.11) \quad dm^n(x, y, \tau) = \gamma_n |\tau|^{n-1} \mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(\tau|x-y) d\tau.$$

La distribution $S^k(x, t, y)$ (x et y étant fixés dans ω_δ), $-N \leq k \leq n$, définie dans l'ouvert $|t| < \kappa_1 \delta^{\frac{1}{2}}$ est, en fait, la restriction à cet ouvert d'une distribution définie sur \mathbf{R} . En effet, on a d'après (4.4):

$$(4.12) \quad S^k(x, t, y) = R^k(x, t, y) + R^k(x, -t, y)$$

et il suffit de prouver que la distribution $R^k(x, t, y)$ définie dans l'ouvert $t < \kappa_1 \delta^{\frac{1}{2}}$ est la restriction à cet ouvert d'une distribution définie sur \mathbf{R} : ce dernier point est évident car d'après (3.25) on a:

$$(4.13) \quad R^k(x, t, y) = \alpha_k(x, y) P^k(s(x, y), t)$$

et $P^k(s, t)$, pour $s > 0$, est une distribution définie sur \mathbf{R} par (3.3)_k.

Nous notons encore par $S^k(x, t, y)$ la distribution définie sur \mathbf{R} que nous

venons de décrire et nous avons par un calcul facile, en vertu des remarques précédentes, la formule suivante:

LEMME 4.2. Pour $-N \leq k \leq n$, soit L^k la distribution valeur au bord d'une fonction holomorphe définie à l'appendice B, formule (2). Alors, pour $x, y \in \omega_\delta$, nous avons:

$$(4.14) \quad [\mathcal{F}^{-1}S^k(x, \cdot, y)](\tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha_k(x, y)}{s(x, y)^{k-1}} L^k(s(x, y)\tau).$$

Nous allons utiliser maintenant (4.10) sur la diagonale, c'est-à-dire lorsque $x = y$.

Nous avons la:

PROPOSITION 4.3. Il existe $\kappa > 0$ et δ_0 vérifiant $0 < \delta_0 \leq 1$, α vérifiant $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ et une constante $C > 0$ tels que:

$$(4.15) \quad \left| [q^{\varepsilon_y} * dm(y, y, \cdot)](\tau) - (2\pi)^{-n} n \omega_n \tau^{n-1} - \gamma_n \alpha_n(y, y) \tau^{n-1} \mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(2\delta_y \tau) \hat{q} \left(\frac{2\delta_y}{\varepsilon_y} \right) \right| \leq C [\delta_y^{-\alpha} \tau^{n-2} + \delta_y^{-\frac{1}{2}(n+1)} \tau^{\frac{1}{2}(n-3)} + \delta_y^{-(n-1)\alpha}]$$

pour tout y tel que $\delta_y \leq \delta_0$ et $\tau \geq 1$.

Dans (4.15), ω_n est la mesure de la boule unité de \mathbb{R}^n et

$$(4.16) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2} \kappa \left(\frac{2}{3} \delta_y \right)^\alpha.$$

PREUVE. Par des arguments classiques de localisation, on construit $\kappa > 0$ et $0 < \delta_0 \leq 1$ telle que la bande $\Omega^{\delta_0} = \{y \in \Omega, \delta_y \leq \delta_0\}$ peut être recouverte par un nombre fini Ω_j d'ouverts de type Ω_0 décrit au 3.1 du § 3, chaque Ω_j est tel que le lemme 3.2 est vrai avec κ et a la propriété: Pour tout $y \in \Omega_j$, le nombre $\delta = \frac{2}{3} \delta_y$ vérifie (3.17) et $\omega_\delta \subset \subset \Omega_j$.

Soit $y \in \Omega^{\delta_0}$ et utilisons (4.10) pour $x = y$ et ε_y donné par (4.16) et pour $\tau \geq 1$.

Sur la diagonale nous avons:

$$(4.17) \quad s(y, y) = 2\delta_y.$$

D'après (4.11) et la valeur $\mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(0) = [\Gamma(\frac{1}{2}n)]^{-1}$ donnée par (2.12), on a:

$$(4.18) \quad dm^n(y, y, \tau) = (2\pi)^{-n} \omega_n n |\tau|^{n-1} d\tau.$$

Un calcul facile donne, pour $\tau > 0$:

$$(4.19) \quad |[q^{\varepsilon_y} * dm^n(y, y, \cdot)](\tau) - (2\pi)^{-n} n \omega_n \tau^{n-1}| \leq C [\delta^{-(n-1)\alpha} + \delta_y^{-\alpha} \tau^{n-2}].$$

Le dernier terme du second membre de (4.10) est estimé, grâce à la proposition 4.1 (avec un choix de α convenable) par :

$$(4.20) \quad |[\mathcal{F}^{-1}\hat{q}_{\varepsilon}(\cdot)S(y, \cdot, y)](\tau)| \leq C \quad \text{pour tout } \tau \in \mathbb{R}.$$

Il reste à étudier les termes $[\mathcal{F}^{-1}\hat{q}_{\varepsilon}(\cdot)S^k(y, \cdot, y)](\tau)$ pour $-N \leq k \leq n$.

La distribution $S^k(y, t, y)$ étant définie sur \mathbb{R} , (4.14) donne :

(4.21)

$$[\mathcal{F}^{-1}\hat{q}_{\varepsilon}(\cdot)S^k(y, \cdot, y)](\tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha_k(y, y)}{s(y, y)^{k-1}} [q^{\varepsilon/s(y, y)} * L^k](s(y, y)\tau).$$

En utilisant le lemme B.3, appendice B, pour le terme $k=n$, nous avons :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{s^{n-1}} (q^{\varepsilon/s} * L^n)(s\tau) - \frac{1}{s^{n-1}} L^n(s\tau) \hat{q}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \right| \\ & \leq C [\varepsilon^{-1} |\tau|^{n-2} + \left(1 + \frac{s}{\varepsilon}\right) s^{-\frac{1}{2}(n+1)} |\tau|^{\frac{1}{2}(n-3)} + \varepsilon^{-(n-1)}] \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, $s > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$.

En utilisant cette estimation pour $\varepsilon = \varepsilon_y$ et $s = s(y, y) = 2\delta_y$, nous obtenons, en utilisant aussi l'expression de L^n donnée au lemme B.1 de l'appendice B :

$$(4.22) \quad \left| [\mathcal{F}^{-1}\hat{q}_{\varepsilon_y}(\cdot)S^n(y, \cdot, y)](\tau) - \frac{\gamma_n}{2} \alpha_n(y, y) \tau^{n-1} \mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(2\delta_y\tau) \hat{q}\left(\frac{2\delta_y}{\varepsilon_y}\right) \right| \\ \leq C [\delta_y^{-\alpha} \tau^{n-2} + \delta_y^{-\frac{1}{2}(n+1)} \tau^{\frac{1}{2}(n-3)} + \delta_y^{-(n-1)\alpha}], \quad \tau > 0.$$

(Dans (4.22), nous avons aussi utilisé la proposition 3.5 pour majorer $|\alpha_n|$).

De la même manière, et plus simplement, nous avons pour les termes $1 \leq k < n$:

$$(4.23) \quad \left| \sum_{1 \leq k < n} [\mathcal{F}^{-1}\hat{q}_{\varepsilon_y}(\cdot)S^k(y, \cdot, y)](\tau) \right| \\ \leq C [\tau^{n-2} + \delta_y^{-\alpha} \tau^{n-3} + \delta_y^{-\frac{1}{2}n} \tau^{\frac{1}{2}(n-5)} + \delta_y^{-(n-2)\alpha}]$$

pour $\tau \geq 1$.

Pour les termes $-N \leq k < 1$, nous utilisons le lemme B.4 (avec $l=0$ par exemple) pour obtenir :

$$(4.24) \quad |[\mathcal{F}^{-1}\hat{q}_{\varepsilon_y}(\cdot)S^k(y, \cdot, y)](\tau)| \leq C \delta_y^{-(1-\alpha)q_1+1}, \quad \tau > 0.$$

On choisit alors α suffisamment près de 1 pour obtenir de là :

$$(4.24)' \quad \left| \sum_{-N \leq k < 1} [\mathcal{F}^{-1}\hat{q}_{\varepsilon_y}(\cdot)S^k(y, \cdot, y)](\tau) \right| \leq C.$$

Alors (4.10), (4.19), (4.20), (4.22), (4.23) et (4.24)' donnent (4.15).

Pour la fonction spectrale, nous avons le résultat crucial suivant:

THÉORÈME 4.4. *Il existe δ_0 vérifiant $0 < \delta_0 \leq 1$, α vérifiant $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ et une constante $C > 0$ telle que:*

$$(4.25) \quad \left| e(y, y, \tau^2) - (2\pi)^{-n} \omega_n \tau^n + (2\pi)^{-n} \frac{\omega_n}{\mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(0)} \int_0^\tau \mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(2\delta_y \sigma) d\sigma^n \right| \leq C[\delta_y^{-\alpha} \tau^{n-1} + \delta_y^{-n\alpha} + \delta_y^{-\frac{1}{2}(n+1)} \tau^{\frac{1}{2}(n-3)} (\delta_y^{-\alpha} + \tau)]$$

pour $\tau \geq 1$, $y \in \Omega$ tel que $\delta_y \leq \delta_0$.

PREUVE. Pour $\tau > 0$, il résulte de la définition de m que:

$$e(y, y, \tau^2) = m(y, y, \tau).$$

Utilisons (4.15). Nous avons de là:

$$(4.26) \quad |[e^{\varepsilon_y} * dm(y, y, \cdot)](\tau)| \leq C[\tau^{n-1} + \delta_y^{-\frac{1}{2}(n+1)} \tau^{\frac{1}{2}(n-3)} + \delta_y^{-(n-1)\alpha}]$$

pour $\tau \geq 1$, y tel que $\delta_y \leq \delta_0$.

Alors (4.26) permet de prouver, de manière classique que:

$$(4.27) \quad |m(y, y, \tau) - [e^{\varepsilon_y} * m(y, y, \cdot)](\tau)| \leq [\delta_y^{-\alpha} \tau^{n-1} + \delta_y^{-\frac{1}{2}(n+1)-\alpha} \tau^{\frac{1}{2}(n-3)} + \delta_y^{-n\alpha}].$$

Utilisons la formule:

$$[e^{\varepsilon_y} * m(y, y, \cdot)](\tau) = [e^{\varepsilon_y} * m(y, y, \cdot)](1) + \int_1^\tau e^{\varepsilon_y} * dm(y, y, \cdot), \quad \tau \geq 1.$$

Alors en intégrant (4.15) de 1 à τ , l'utilisation de la formule précédente donne:

$$(4.28) \quad \left| [e^{\varepsilon_y} * m(y, y, \cdot)](\tau) - (2\pi)^{-n} \omega_n \tau^n - \gamma_n \alpha_n(y, y) \hat{q}\left(\frac{2\delta_y}{\varepsilon_y}\right) \int_0^\tau \sigma^{n-1} \mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(2\delta_y \sigma) d\sigma \right| \leq C[\delta_y^{-\alpha} \tau^{n-1} + \delta_y^{-\frac{1}{2}(n+1)} \tau^{\frac{1}{2}(n-1)} + \delta_y^{-(n-1)\alpha} \tau]$$

pour $\tau \geq 1$.

D'après la proposition (3.5), nous avons:

$$(4.29) \quad |\alpha_n(y, y) + 1| \leq C\delta_y,$$

et comme $\hat{q}(0) = 1$, nous avons:

$$(4.30) \quad \left| \hat{\varrho} \left(\frac{2\delta_y}{\varepsilon_y} \right) - 1 \right| \leq C \delta_y^{1-\alpha}.$$

On vérifie que l'on a :

$$\left| \int_0^\tau \sigma^{n-1} \mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(2\delta_y \sigma) d\sigma \right| \leq C \delta_y^{-1} \tau^{n-1}.$$

En utilisant (4.29), (4.30), nous avons donc :

$$(4.31) \quad \left| \left(\alpha_n(y, y) \hat{\varrho} \left(\frac{2\delta_y}{\varepsilon_y} \right) + 1 \right) \int_0^\tau \sigma^{n-1} \mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(2\delta_y \sigma) d\sigma \right| \leq C \delta_y^{-\alpha} \tau^{n-1}.$$

Alors (4.27), (4.28) et (4.31) donnent (4.25) en écrivant que :

$$\gamma_n = (2\pi)^{-n} \frac{n\omega_n}{\mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(0)}.$$

REMARQUE. L'estimation du second membre de (4.25) n'est pas suffisante pour la suite dans le cas $n=1$.

Pour ce cas, en utilisant l'expression explicite simple de la fonction de $\mathcal{J}_{-\frac{1}{2}}$, nous avons le résultat suivant dont la vérification est laissée au lecteur :

Dans les mêmes conditions du théorème 4.4, la fonction spectrale $e(y, y, \tau^2)$ vérifie, pour la dimension 1 :

$$(4.25)' \quad \left| e(y, y, \tau^2) - \frac{\tau}{\pi} + \frac{1}{\pi} \frac{\sin 2\delta_y \tau}{2\delta_y} \right| \leq C \delta_y^{-\alpha}$$

pour tout $\tau \geq 0$ et y tel que $\delta_y \leq \delta_0$.

Pour le comportement asymptotique des valeurs propres, nous avons le :

THÉORÈME 4.5. Nous avons, pour $n \geq 1$:

$$(4.32) \quad N(\lambda) = (2\pi)^{-n} \omega_n |\Omega| \lambda^{\frac{1}{2}n} + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{1}{2}(n-1)}), \quad \lambda \rightarrow \infty$$

où $|\Omega|$ est la mesure de Ω .

PREUVE. Nous avons :

$$(4.33) \quad N(\lambda) = \int_{\Omega} e(y, y, \lambda) dy.$$

Utilisons le théorème 4.4.

Soit δ_0 donné par ce théorème et notons $\Omega_0 = \{y ; \delta_y \leq \delta_0\}$. D'après L. Hörmander [7], nous avons sur $\Omega - \Omega_0$:

$$(4.34) \quad \int_{\Omega - \Omega_0} [e(y, y, \lambda) - (2\pi)^{-n} \omega_n \lambda^{\frac{1}{2}n}] dy = O(\lambda^{\frac{1}{2}(n-1)}) \quad \lambda \rightarrow +\infty .$$

Pour λ assez grand, notons $\Omega_\lambda = \{y \in \Omega_0 ; \delta_y > 1/2\sqrt{\lambda}\}$. Utilisant (1.1), nous avons sur $\Omega_0 - \Omega_\lambda$:

$$(4.35) \quad \int_{\Omega_0 - \Omega_\lambda} [e(y, y, \lambda) - (2\pi)^{-n} \omega_n \lambda^{\frac{1}{2}n}] dy = O(\lambda^{\frac{1}{2}(n-1)}), \quad \lambda \rightarrow +\infty .$$

Sur Ω_λ , utilisons (4.25).

Posons $\tau = \sqrt{\lambda}$. On a, pour $\tau \geq 1/2\delta_y$:

$$\int_0^\tau \sigma^{n-1} \mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(2\delta_y \sigma) d\sigma = \int_{(2\delta_y)^{-1}}^\tau + \int_0^{(2\delta_y)^{-1}} .$$

En utilisant le comportement asymptotique de $\mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}$ (utilisé à l'appendice B), nous obtenons facilement:

$$(4.36) \quad \left| \int_0^\tau \sigma^{n-1} \mathcal{J}_{\frac{1}{2}n-1}(2\delta_y \sigma) d\sigma \right| \leq C(\delta_y^{-n} + \delta_y^{-\frac{1}{2}(n+1)} \tau^{\frac{1}{2}(n-1)}), \quad \delta_y \tau \geq \frac{1}{2} .$$

Alors (4.25) et (4.26) donnent pour $n > 1$:

$$|e(y, y, \lambda) - (2\pi)^{-n} \omega_n \lambda^{\frac{1}{2}n}| \leq C(\delta_y^{-\alpha} \lambda^{\frac{1}{2}(n-1)} + \delta_y^{-\frac{1}{2}(n+1)} \lambda^{\frac{1}{2}(n-1)} + \delta_y^{-n})$$

pour $y \in \Omega_\lambda$, $\lambda \geq 1$.

Il vient, puisque $\alpha < 1$ et $n > 1$:

$$(4.37) \quad \int_{\Omega_\lambda} [e(y, y, \lambda) - (2\pi)^{-n} \omega_n \lambda^{\frac{1}{2}n}] dy = O(\lambda^{\frac{1}{2}(n-1)}) \quad \lambda \rightarrow \infty .$$

Alors (4.34), (4.35) et (4.37) donnent (4.32).

Le cas $n=1$ se traite de la même manière en utilisant (4.25)'.

REMARQUE. Le cas de problème de Neumann se traite de manière analogue. Il suffit de remplacer Δ par $\Delta + 1$, la condition aux limites (3.9)' pour le terme de transport principal α_n par:

$$(4.38) \quad \alpha_n(x, y) = +1, \quad x \in \Gamma_x^\delta, \quad y \in \omega_\delta .$$

Cette condition résulte de la propriété:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} |x - y| = -\frac{\partial}{\partial \nu} s(x, y), \quad x \in \Gamma_x^\delta, \quad y \in \omega_\delta$$

où ν est la normale unitaire extérieure à Ω .

Pour les autres termes α_{n-2l} , $1 \leq l \leq m$, les conditions aux limites (3.10)'_{n-2l} sont changées en:

$$(4.39) \quad \alpha_{n-2l}(x, y) = c_{n-2l}(x, y) \quad x \in \Gamma_x^\delta, y \in \omega_\delta$$

où les fonctions c_{n-2l} sont définies par récurrence sur l (par exemple c_{n-2} est déterminé par α_n, c_{n-4} par α_n et α_{n-2} etc.).

Pour le terme compensateur, on résoud un problème des ondes mixtes avec donnée au bord de Neumann non nulle.

Nous obtenons ainsi, pour le problème de Neumann, un résultat de même nature que le théorème 4.4 où dans (4.25), pour le terme oscillant, on change le signe + en signe -.

Appendice A.

Au § 3, nous avons noté, pour k réel et $s > 0$:

$$(1) \quad E^k(s; p) = \gamma_k p^{k-1} \mathcal{K}_{\frac{1}{2}k-1}(sp) \quad \gamma_k = 2^{-k+1} \pi^{-\frac{1}{2}k}$$

défini pour $p \in \mathbf{C} - \bar{\mathbf{R}}_-$.

Les fonctions de Bessel \mathcal{K}_μ s'expriment sous forme intégrale (cf. G. N. Watson [12, page 172]), pour $\mu > -\frac{1}{2}$, par les formules:

$$(2) \quad \mathcal{K}_\mu(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})} \int_1^\infty e^{-zt} (t^2 - 1)^{\mu - \frac{1}{2}} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Notons f_μ la fonction:

$$t \mapsto f_\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1 \\ \frac{(t^2 - 1)^{\mu - \frac{1}{2}}}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})} & \text{si } t > 1 \end{cases} \quad \mu > -\frac{1}{2}.$$

En utilisant des résultats de Guelfand-Chilov [6, page 46], on montre que l'application $\mu \mapsto f_\mu$ définie sur $]-\frac{1}{2}, \infty[$ à valeur dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ est en fait une fonction entière. Ainsi, pour $\operatorname{Re} z > 0$ fixé, la fonction définie sur $]-\frac{1}{2}, \infty[$:

$$\mu \mapsto \int_1^\infty e^{-zt} \frac{(t^2 - 1)^{\mu - \frac{1}{2}}}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})} dt:$$

a un prolongement entier dans \mathbf{C} que l'on note encore par:

$$\int_1^\infty e^{-zt} \frac{(t^2 - 1)^{\mu - \frac{1}{2}}}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})} dt.$$

Alors (2) est vraie pour tout $\mu \in \mathbf{C}$ avec cette notation par prolongement analytique.

Pour $\operatorname{Re} p > 0$ fixé et $\mu \in \mathbf{C}$, on vérifie que la fonction:

$$s > 0 \mapsto \int_1^\infty e^{-sp t} \frac{(t^2 - 1)^{\mu - \frac{1}{2}}}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})} dt$$

est C^∞ sur \mathbf{R}^+ .

On a :

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial s} \int_1^\infty e^{-spt} \frac{(t^2-1)^{\mu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} dt = -\frac{p^2 s}{2} \int_1^\infty e^{-spt} \frac{(t^2-1)^{\mu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\mu+\frac{3}{2})} dt .$$

On établit (3) en montrant sa validité pour $\operatorname{Re} \mu > -\frac{1}{2}$ par des intégrations par parties, d'où (3) est vraie pour tout $\mu \in \mathbb{C}$ par prolongement analytique.

Avec (1), (2) et (3), nous avons établi le :

LEMME A.1. *Pour tout $k \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{Re} p > 0$, nous avons la formule de récurrence :*

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial s} E^k(s; p) = -2\pi s E^{k+2}(s; p), \quad s > 0 .$$

De la même manière, nous avons aussi le :

Lemme A.2. *Pour tout $k \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{Re} p > 0$, $E^k(s; p)$ est solution de l'équation différentielle sur \mathbb{R}^+ :*

$$(5) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{k-1}{s} \frac{\partial}{\partial s} - p^2 \right) E^k = 0, \quad s > 0 .$$

REMARQUE. NOUS AVONS AINSI ÉTENDU À TOUT $k \in \mathbb{R}$, une équation différentielle analogue à celle établie par Malmsten (cf. Watson [12, page 187]).

Appendice B.

D'après l'étude faite au § 3, nous nous intéressons, pour k entier, à la fonction :

$$(1) \quad \mathcal{L}^k(z) = \gamma_k z^{k-1} \mathcal{K}_{\frac{1}{2}k-1}(z), \quad z \in \mathbb{C} - \bar{\mathbb{R}}_-$$

où $\gamma_k = 2^{-k+1} \pi^{-\frac{1}{2}k}$ et $\mathcal{K}_{\frac{1}{2}k-1}$ la fonction holomorphe (2.9) associée à la fonction de Bessel $K_{\frac{1}{2}k-1}$. Comme au § 2, on montre, grâce à (2) de l'appendice A, que :

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha > 0}} \mathcal{L}^k(\alpha + i \cdot) \text{ existe dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

et notons cette distribution, valeur au bord d'une fonction holomorphe par v.b. \mathcal{L}^k . Posons :

$$(2) \quad L^k = \text{v.b. } \mathcal{L}^k + \text{v.b. } \check{\mathcal{L}}^k .$$

Au § 2, nous avons pratiquement prouvé le :

LEMME B.1. *Pour $k \geq 1$, la distribution L^k est une fonction exprimée explicitement par :*

$$(3) \quad L^k(\tau) = \pi\gamma_k |\tau|^{k-1} \mathcal{J}_{\frac{1}{2}k-1}(\tau), \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

Nous laissons au lecteur la preuve du :

LEMME B.2. *Pour $k < 1$, la distribution L^k est, dans le complémentaire de l'origine, une fonction, donnée explicitement par le second membre de (3).*

Soit ϱ une fonction de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, positive, paire telle que :

$$(4) \quad \varrho(\eta) > 0 \quad \text{si } |\eta| \leq 1$$

$$\int \varrho(\eta) d\eta = 1.$$

Pour $\varepsilon > 0$, notons $\varrho^\varepsilon(\eta) = \varepsilon \varrho(\varepsilon\eta)$. Alors

$$(5) \quad \int \varrho^\varepsilon(\eta) d\eta = 1.$$

LEMME B.3. *Soit $k \geq 1$. Il existe $C > 0$ telle que :*

$$\left| (\varrho^\varepsilon * L^k)(\tau) - L^k(\tau) \hat{\varrho}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right| \leq C[\varepsilon^{-1}|\tau|^{k-2} + (1 + \varepsilon^{-1})|\tau|^{\frac{1}{2}(k-3)} + \varepsilon^{-(k-1)}]$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et $\tau \in \mathbf{R}$ ($\hat{\varrho}$ est la transformée de Fourier de ϱ).

PREUVE. Nous avons, d'après (3) :

$$(7) \quad \frac{1}{\pi\gamma_k} (\varrho^\varepsilon * L^k)(\eta)$$

$$= \int \varrho^\varepsilon(\eta) (|\tau - \eta|^{k-1} - |\tau|^{k-1}) \mathcal{J}_{\frac{1}{2}k-1}(\tau - \eta) d\eta + |\tau|^{k-1} \int \varrho^\varepsilon(\eta) \mathcal{J}_{\frac{1}{2}k-1}(\tau - \eta) d\eta.$$

Si $k = 1$, le premier terme du second membre de l'égalité (7), noté (I), est nul, si non :

$$(8) \quad |\text{(I)}| \leq C[\varepsilon^{-(k-1)} + \varepsilon^{-1}|\tau|^{k-2}]$$

car $\mathcal{J}_{\frac{1}{2}k-1}$ est bornée.

Le second terme du second membre de (7), noté (II), s'écrit, en supposant $\tau > 0$:

$$(9) \quad \text{(II)} = |\tau|^{k-1} \left[\int_{|\eta| \leq \frac{1}{2}\tau} \varrho^\varepsilon(\eta) \mathcal{J}_{\frac{1}{2}k-1}(\tau - \eta) d\eta \right. \\ \left. + \int_{|\eta| > \frac{1}{2}\tau} \varrho^\varepsilon(\eta) \mathcal{J}_{\frac{1}{2}k-1}(\tau - \eta) d\eta \right].$$

Comme $\varrho \in \mathcal{S}$, nous avons pour tout $l > 0$:

$$(10) \quad \left| \tau^{k-1} \int_{|\eta| > \frac{1}{2}\tau} \varrho^\varepsilon(\eta) \mathcal{J}_{\frac{1}{2}k-1}(\tau-\eta) d\eta \right| \leq C_l (\varepsilon\tau)^{-l} \tau^{k-1}.$$

Il reste à étudier $\int_{|\eta| \leq \frac{1}{2}\tau} \varrho^\varepsilon(\eta) \mathcal{J}_{\frac{1}{2}k-1}(\tau-\eta) d\eta$. On a:

$$(11) \quad \frac{\tau}{2} \leq \tau - \eta \leq \frac{3\tau}{2}, \quad |\eta| \leq \frac{\tau}{2}.$$

En utilisant le comportement asymptotique de $\mathcal{J}_{\frac{1}{2}k-1}(\xi)$ (cf. R. Courant-D. Hilbert [4, page 526]):

$$(12) \quad \left| \mathcal{J}_{\frac{1}{2}k-1}(\xi) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}} \cos\left(\xi - (k-1)\frac{\pi}{4}\right) \right| \leq C|\xi|^{-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}}, \quad \xi \in \mathbf{R}$$

il vient, d'après (11):

$$\left| \mathcal{J}_{\frac{1}{2}k-1}(\tau-\eta) - \frac{2^{k-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} (\tau-\eta)^{-k-\frac{1}{2}} \cos\left(\tau-\eta - (k-1)\frac{\pi}{4}\right) \right| \leq C\tau^{-k+\frac{1}{2}} \quad |\eta| \leq \frac{\tau}{2}$$

avec C indépendant de τ .

Il en résulte que:

$$\left| \mathcal{J}_{\frac{1}{2}k-1}(\tau-\eta) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}(k-1)} \cos\left(\tau-\eta - (k-1)\frac{\pi}{4}\right) \right| \leq C\tau^{-\frac{1}{2}(k+1)}(1+|\eta|)$$

$$|\eta| \leq \frac{\tau}{2}.$$

En multipliant par ϱ^ε et en intégrant sur $|\eta| \leq \frac{1}{2}\tau$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \left| \int_{|\eta| \leq \frac{1}{2}\tau} \varrho^\varepsilon(\eta) \mathcal{J}_{\frac{1}{2}k-1}(\tau-\eta) d\eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}(k-1)} \cos\left(\tau - (k-1)\frac{\pi}{4}\right) \hat{\varrho}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right| \\ \leq C\tau^{-\frac{1}{2}(k+1)}\varepsilon^{-1} + C\tau^{-\frac{1}{2}(k-1)} \int_{|\eta| > \frac{1}{2}\tau} \varrho^\varepsilon(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Utilisant de nouveau (12) et le fait $\varrho \in \mathcal{S}$, nous obtenons:

$$(13) \quad \left| \int_{|\eta| \leq \frac{1}{2}\tau} \varrho^\varepsilon(\eta) \mathcal{J}_{\frac{1}{2}k-1}(\tau-\eta) d\eta - \mathcal{J}_{\frac{1}{2}k-1}(\tau) \hat{\varrho}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right| \leq C\tau^{-\frac{1}{2}(k+1)}(1+\varepsilon^{-1}) + C_l \tau^{-\frac{1}{2}(k-1)} (\varepsilon\tau)^{-l}.$$

Alors (7), (8), (9), (10) et (13) donnent (6) en prenant $l=1$ dans (10) et (13).

Les termes correspondants à $k < 1$ sont donnés par le:

LEMME B.4. Soit $k < 1$. Il existe un entier $q > 0$ et une constante $C > 0$ telle que

$$|(\varrho^\varepsilon * L^k)(\tau)| \leq C(1 + (1 + \varepsilon)^q |\tau|^{-q}) \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0 \text{ et } \tau \in \mathbb{R}.$$

PREUVE. Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, égale à 1 sur un voisinage de $] -1, 1[$ et nulle en dehors de $] -2, 2[$ et notons $\beta = 1 - \alpha$. Alors $L^k = \alpha L^k + \beta L^k$.

Comme αL^k est une distribution à support compact et $\varrho^\varepsilon \in \mathcal{S}$, on sait que $\varrho^\varepsilon * (\alpha L^k)$ est une fonction de \mathcal{S} et on montre qu'il existe un entier q tel que, pour tout $l > 0$, il existe C_l vérifiant:

$$(15) \quad |(\varrho^\varepsilon * \alpha L^k)(\tau)| \leq C_l (1 + \varepsilon)^q |\tau|^{-l}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

La distribution βL^k est, d'après le lemme B.2, une fonction égale à :

$$\pi \gamma_k \beta(\tau) |\tau|^{k-1} \mathcal{J}_{\frac{1}{2}k-1}(\tau)$$

et on vérifie facilement, puisque $k < 1$, qu'elle est bornée sur \mathbb{R} . Il en résulte que :

$$(16) \quad |(\varrho^\varepsilon * \beta L^k)(\tau)| \leq C, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Alors (15), (16) donnent (14) en prenant $l = q$ dans (15).

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Agmon, *Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators*, Arch. Rational Mech. Anal. 28 (1968), 165–183.
2. V. M. Babic and B. M. Levitan, *The focussing problem and the asymptotic behaviour of the spectral function of the Laplace–Beltrami operator*, Soviet Math. Dokl. 17 (1967), 1414–1417.
3. J. Brüning, *Zur Abschätzung der Spektralfunktion elliptischer Operatoren*, Math. Z. 137 (1974), 75–85.
4. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics — Vol. I*, Interscience Publishers, New York - London, 1953.
5. H. G. Garnir, *Les problèmes aux limites de la physique mathématique*, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1958.
6. I. M. Guelfand et G. E. Chilov, *Les distributions*, Tome I, Dunod Editeur, Paris, 1962.
7. L. Hörmander, *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math. 121 (1968), 193–218.
8. B. M. Levitan, *On the asymptotic behavior of the spectral function of a self-adjoint differential equation of second order*, Izv. Akad. Nauk SSSR Série Mat. 16 (1952), 325–352.
9. B. M. Levitan and I. S. Sargsjan, *Introduction to spectral theory*, Translations of Mathematical Monographs, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1975.
10. J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes*, Vol. 2, Dunod Editeur, Paris, 1968.
11. R. Seeley, *A sharp asymptotic remainder estimate for the eigenvalues of the Laplacian in a domain of \mathbb{R}^3* , Advances in Math. 29 (1978), 244–269.
12. G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1944.