MATH. SCAND. 46 (1980), 23–53

ULTRAFILTRES SUR UN ESPACE SPECTRAL — ANNEAUX DE BAER — ANNEAUX A SPECTRE MINIMAL COMPACT

GABRIEL PICAVET

Les résultats exposés danc cette note ne concernent pas, pour la plupart, des sujets nouveaux. Dans une première partie, on étudie les points limites d'un ultrafiltre sur un espace spectral, c'est à dire sur le spectre d'un anneau commutatif (voir l'article de M. Höchster [10]). On en donne quelques applications: la principale est la démonstration, purement topologique, d'une conjecture de Henriksen et Jerison [9], démontrée par d'autres méthodes dans [18] et [24]. On montre ensuite comment l'espace des ultrafiltres sur un spectre fournit une résolution projective de ce spectre (dans la catégorie des espaces spectraux). La suite concerne, principalement, des propriétés de transfert de la notion d'anneau de Baer (ou à spectre minimal compact) par les homomorphismes d'anneaux. A cet effet, nous donnons une définition par les éléments de l'enveloppe épimorphe d'un anneau réduit [30] et de l'enveloppe de Baer faible d'un anneau réduit (voir [14], [28], [29]). Ces définitions permettent une démonstration rapide de la fonctorialité des constructions, pour certaines classes de morphismes dont on fait une étude: ces morphismes ont des définitions voisines de celle d'homomorphisme essentiel d'anneaux. En particulier, on introduit la notion de morphisme minimalisant: ce sont les homomorphismes d'anneaux commutatifs unitaires, tels que le morphisme spectral associé transforme un idéal premier minimal en idéal premier minimal. On donne quelques propriétés et caractérisations de ces morphismes. On termine par une comparaison des clôtures algébriques d'un anneau définies dans [5], [11] et [1].

0. Terminologie et notations.

On se place, dans cette note, dans la catégorie des anneaux commutatifs unitaires. La catégorie des espaces spectraux sera désignée par Spectr.

Les notations, notions, résultats sans référence proviennent de [3] et [7]. On suppose de plus connue la théorie des localisations suivant P. Gabriel, *Des*

Reçu le 15 décembre 1978.

catégories Abéliennes, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), ou du moins, la partie exposée dans l'exercice de Bourbaki, *Algèbre Commutative — Chapitre* 2.

Si A est un anneau commutatif unitaire, on désigne par $\operatorname{Min} A$, l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A. Les fermés (ou ouverts) de $\operatorname{Min} A$ pour la topologie induite par la topologie de Zariski de Spec (A) seront notés $V_M(\,)$ (ou $D_M(\,)$).

Si f est un morphisme d'anneaux, la restriction de ${}^t f$, morphisme spectral associé, aux idéaux premiers minimaux est désignée par ${}^t f_M$, lorsque f est minimalisant.

Sauf mention du contraire, la topologie sur les spectres est celle de Zariski et une propriété topologique d'un morphisme d'anneaux concerne le morphisme spectral associé.

On notera par Gold (A) l'ensemble des idéaux premiers de Goldman d'un anneau A [23].

L'adhérence constructible d'une partie X d'un spectre sera désignée par $\bar{X}^c$.

Un anneau absolument plat (régulier au sens de von Neumann) prend ici le nom d'anneau plat.

Pour tout anneau A, on désigne par Bool (A) l'anneau Booleien des idempotents de A muni des lois: $e \wedge f = ef$ et $e \vee f = e + f - ef$.

I. Points limites d'un ultrafiltre sur un spectre et applications.

LEMME 1. *Soit A un anneau et soit $\mathscr{F}$ un ultrafiltre sur* Spec (A), *il existe un idéal premier P de A tel que l'ensemble des points limites de $\mathscr{F}$ soit $V(P)$. De plus P est le point limite de $\mathscr{F}$ dans la topologie constructible.*

PREUVE. Il suffit de montrer que $L = \bigcap_{X \in \mathscr{F}} \bar{X}$ est un fermé irréductible de Spec (A). Soient $D(f)$ et $D(g)$ deux ouverts de la base de Spec (A) tels que $L \cap D(f) \cap D(g) = \varnothing$, la famille de parties proconstructibles $\{\bar{X}, D(f), D(g)\}_{X \in \mathscr{F}}$ a une intersection vide. La propriété d'intersection finie entraine, puisque $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre, que $V(f)$ ou $V(g)$ est dans $\mathscr{F}$: ainsi $L \cap D(f) = \varnothing$ ou $L \cap D(g) = \varnothing$. Dans la topologie constructible on a: $\bigcap_{X \in \mathscr{F}} \bar{X}^c = \{Q\} \subset L = V(P)$, d'où P est contenu dans Q. Soit alors $a \in Q - P$, de $P \in D(a)$ on déduit que $D(a) \in \mathscr{F}$, puisque $D(a)$ est ouvert. D'où la contradiction $Q \in \overline{D(a)}^c = D(a)$.

REMARQUE. Ce lemme est à mettre en parallèle avec un théorème de [10] qui assure que la compacité de la topologie constructible est équivalente à la sobriété d'un espace topologique (lorsque celui-ci est T_0, quasi-compact, et a une base d'ouverts rétrocompacts).

Nous allons déduire du lemme 1, de manière purement topologique, la démonstrations d'une conjecture de [9], démontrée par d'autres méthodes dans [18] et [24]. Si A est un anneau à spectre minimal compact, pour tout $a \in A$, l'ensemble $V_M(a)$ est un ouvert et fermé de l'espace compact $\operatorname{Min} A$. L'utilisation de la base d'ouverts de $\operatorname{Spec}(A)$ permet de montrer que la condition suivante est réalisée:

(*) pour tout $a \in A$, il existe un idéal de type fini I_a tel que $V_M(a) = D_M(I_a)$.

La conjecture est: la condition (*) entraine $\operatorname{Min} A$ est compact.

PROPOSITION 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'anneau A ait un spectre minimal compact est que la condition* (*) *soit satisfaite.*

PREUVE. Supposons la condition (*) satisfaite et soit $\mathscr{F}$ un ultrafiltre sur $\operatorname{Min} A$. Alors $\mathscr{F}$ est une base d'ultrafiltre sur $\operatorname{Spec}(A)$. D'après le lemme 1, nous avons $\bigcap_{X \in \mathscr{F}} \bar{X} = V(P)$ où P est un idéal premier de A. De $V(P) = \bigcap_{a \in P} V(a)$ on déduit: pour tout $a \in P$, $\bigcap \bar{X} \cap D(a) = \varnothing$. La compacité de la topologie constructible entraine l'existence de

$$\{X_1, \ldots, X_n\} \subset \mathscr{F} \text{ telle que } X_1 \cap \ldots \cap X_n \subset V(a) \cap \operatorname{Min} A .$$

Soit pour tout $a \in P$ l'idéal I_a de type fini dont la condition (*) assure l'existence. On obtient $V(a) \cap \operatorname{Min} A = D(I_a) \cap \operatorname{Min} A$, mais puisque $D(I_a) \cap \operatorname{Min} A$ est dans $\mathscr{F}$, la famille $\{D(I_a)\}_{a \in P}$, formée de parties proconstructibles, possède la propriété d'intersection finie. Soit Q un idéal premier de A dans $\bigcap_{a \in P} D(I_a)$, et soit M dans $\operatorname{Min} A$ tel que $M \subset Q$; puisque $\bigcap_{a \in P} D(I_a)$ est stable par générisation, on obtient

$$M \in \bigcap_{a \in P} D(I_a) \cap \operatorname{Min} A = \operatorname{Min} A \cap V(P) = \bigcap_{X \in \mathscr{F}} \bar{X} \cap \operatorname{Min} A .$$

D'où $\mathscr{F}$ possède un point adhérent.

PROPOSITION 2. *Soit X une partie du spectre d'un anneau A, alors $\bar{X} = s(\bar{X}^c)$, où s désigne l'opération de spécialisation dans* $\operatorname{Spec}(A)$.

PREUVE. De $\bar{X}^c \subset \bar{X}$ et puisque $\bar{X}$ est stable par spécialisation, on déduit: $s(\bar{X}^c) \subset \bar{X}$. Soit $P \in \bar{X}$, il existe un ultrafiltre $\mathscr{F}$ sur X convergeant vers P. Si Q est le point limite de $\mathscr{F}$ dans la topologie constructible, on a: $Q \in \bar{X}^c$. D'après le lemme 1, Q est contenu dans P, d'où l'on déduit $P \in s(\bar{X}^c)$.

COROLLAIRE 1 [7]. *Soit X une partie du spectre d'un anneau, pour que X soit fermée il faut et il suffit que X soit proconstructible et stable par spécialisation.*

COROLLARIRE 2. *Soit X une partie du spectre d'un anneau A et soit I l'idéal de A tel que $\bar{X} = V(I)$. Si P est un idéal premier de* Min (A/I), *alors P appartient à $\bar{X}^c$.*

PREUVE. Il est clair que P appartient à $\bar{X}$. D'après la proposition 2, soit $Q \in \bar{X}^c$ tel que $Q \subset P$; puisque $\bar{X}^c$ est contenu dans $\bar{X}$, on a $Q \in V(I)$, d'où $Q = P$.

REMARQUE. On sait que, si X est une partie d'un spectre, $P \in \bar{X}$ équivaut à: $\bigcap_{Q \in X} Q \subset P$. D'autre part dans [23], il est défini sur le spectre d'un anneau une topologie, dite de Goldman, de la manière suivante: soit X une partie du spectre et $\bar{X}^G$ l'adhérence pour cette topologie, alors $P \in \bar{X}^G$ si et seulement si P est une intersection d'éléments de X. De plus, on peut vérifier que

$$\bar{X}^G \subset \bar{X}^c \subset \bar{X} .$$

On peut se demander s'il existe une formulation analogue pour la topologie constructible. La condition est: $P \in \bar{X}^c$ si et seulement si $P = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{Q \in X_i} Q$, où $\{X_i\}_{i \in I}$ est une famille de parties de X, filtrante inférieurement. En effet, si $P \in \bar{X}^c$, on peut voir que $V(P) = \bigcap_{I \in F} \overline{X \cap V(I)}$, où F est la famille des idéaux de type fini de A, contenus dans P, et de plus, $\{X \cap V(I)\}_{I \in F}$ est bien filtrante inférieurement. Réciproquement, supposons $P = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{Q \in X_i} Q$, où $\{X_i\}_{i \in I}$ familles de parties de X, filtrante inférieurement. Soit I un idéal de type fini, contenu dans P et soit $a \notin P$, on peut alors controler aisément que $X \cap V(I) \cap D(a)$ n'est pas vide, d'où P appartient à $\bar{X}^c$.

II. Resolution projective d'un espace spectral et ultrafiltres.

D'après [8], l'ensemble $\gamma(\text{Spec}\,(A))$ des ultrafiltres sur le spectre d'un anneau A, muni de sa topologie canonique, est un espace Stonien, c'est à dire compact et extrémal. On rappelle qu'un espace topologique est dit extrémal si l'adhérence de tout ouvert est un ouvert. De plus, $\gamma(\text{Spec}\,(A))$ n'est autre que le spectre de l'anneau Booléien canonique des parties de $\text{Spec}\,(A)$. Ainsi $\gamma(\text{Spec}\,(A))$ est un espace spectral Stonien. On montre dans [6] que les objects projectifs de la catégorie des espaces topologiques compacts sont les espaces extrémaux compacts. Soit $\delta\colon \gamma(\text{Spec}\,(A)) \to \text{Spec}\,(A)$ l'application définie par $\delta(\mathscr{F}) = \text{Lim}\,\mathscr{F}$, la limite étant prise pour la topologie constructible. Il est clair que δ est surjective. De plus δ est un morphisme de Spectr: il suffit de montrer que $\delta^{-1}(0) = \gamma(0)$ où 0 est un ouvert quasi-compact de $\text{Spec}\,(A)$, or cette égalité est à peu près évidente parce que 0 est proconstructible. En effet $\gamma(0)$ est un ouvert quasi-compact de $\gamma(\text{Spec}\,(A))$. Dans [23] on montre que les épimorphismes de la catégorie Spectr ne sont autres que les surjections. Nous avons maintenant un matériel suffisant pour démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION 3. *Soit A un anneau, le morphisme* $\gamma(\mathrm{Spec}\,(A)) \to \mathrm{Spec}\,(A)$ *est une résolution projective de* Spec (A) *dans* Spectr.

PREUVE. Il suffit de montrer qu'un objet de Spectr, soit Spec (B), tel que Spec (B) soit Stonien est projectif. Considerons un diagramme de Spectr:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Spec}\,(B) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ \mathrm{Spec}\,(B') & \xrightarrow{f} & \mathrm{Spec}\,(A') \end{array}$$

où φ est spectrale et f surjective spectrale. On peut considérer le même diagramme où les spectres sont munis de la topologie constructible, les morphismes restant continus. Puisque Spec (B) est un objet projectif de la catégorie des espaces compacts, il existe une application continue pour la topologie constructible Ψ: Spec $(B) \to$ Spec (B') telle que $\varphi = f \circ \Psi$. Puisque Spec (B) est compact, Ψ est un morphisme spectral: une application entre espaces spectraux est spectrale si et seulement si elle est continue pour les topologies constructible et de Zariski.

REMARQUES.

1) La preuve ci-dessus montre que tout spectre Stonien est un objet projectif de Spectr. On aura, un peu plus loin, à l'aide des anneaux de Baer, une couverture projective pour tout objet de Spectr.

2) On peut donner de la proposition 3 une interprétation plus algébrique. Le résultat suivant est sans doute bien connu: soit $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille d'anneaux intégres et désignons par A l'anneau produit de la famille, alors Min A est homéomorphe à $\gamma(I)$, l'espace canonique des ultrafiltres sur I. Soit maintenant A un anneau quelconque et soit $A \to \prod_{P \in \mathrm{Spec}\,(A)} k(P)$, où $k(P)$ est le corps résiduel de A en P, l'homomorphisme canonique; un résultat de [21] montre que Spec $(\prod k(P)) \to$ Spec (A) est surjective. D'après le rappel, on voit que Spec $(\prod k(P))$ est un espace Stonien. Il n'est pas difficile de montrer que Spec $(\prod k(P)) \to$ Spec (A) n'est autre que $\gamma(\mathrm{Spec}\,(A)) \to \mathrm{Spec}\,(A)$, à travers l'homéomorphisme $\gamma(\mathrm{Spec}\,(A)) \to \mathrm{Spec}\,(\prod k(P))$.

III. Anneaux à spectre minimal compact et anneaux de Baer.

Il existe une classe importante d'anneaux à spectre minimal compact: les anneaux de Baer. Ces anneaux ont fait l'objet d'une littérature abondante: [2],

[11], [12], [13], [14], [19], [26], [27], [28], [29], la liste n'étant sans doute pas exhaustive. Rappelons quelques définitions et résultats.

DÉFINITION 1. Un anneau A est dit de Baer si pour tout idéal I de A, il existe un idempotent e de A tel que $0:I=Ae$.

Il est dit de Baer faible si pour tout $a \in A$, il existe un idempotent e de A tel que $0:a=Ae$.

Il est clair qu'un anneau intègre est de Baer (de Baer faible). Tout produit d'anneaux de Baer (resp. Baer faible) est de Baer (resp. Baer faible) Un anneau plat est de Baer faible. Un anneau réduit autoinjectif est de Baer. Un anneau presque héréditaire est de Baer faible (voir [32]). Tout anneau de Baer faible est réduit.

PROPOSITION 4. *Soit A un anneau réduit:*

a) [2] *L'anneau A est de Baer si et seulement si* Spec (A) *est extrèmal.*

b) [11] *L'anneau A est de Baer si et seulement si les composantes irréductibles de* Spec (A) *sont disjointes et* Min A *est un espace Stonien.*

c) [13] *L'anneau A est de Baer faible si et seulement si une rétraction continue de* Spec (A) *sur* Min A *existe.*

REMARQUES.

1) La compacité de Min A pour un anneau de Baer (de Baer faible) s'obtient par la proposition 4 c).

2) Dans [11] une affirmation est érronée: un sous espace connexe d'un espace extrémal est irréductible, d'où l'on déduit que les composantes connexes et irréductibles d'un espace extrémal sont identiques. Soit en effet $K[X, Y]$ l'anneau des polynômes en X et Y sùr un corps K. Le spectre de $K[X, Y]$ est extrémal, il posséde un fermé $V(XY)$ non irréductible mais connexe: l'anneau $K[X, Y]/(XY)$ n'a pas d'autres idempotents que 0 ou 1.

Cependant, la conséquence de cette affirmation reste vraie, du moins dans un espace spectral.

PROPOSITION 5. *Soit A un anneau tel que* Spec (A) *soit extrémal, les composantes connexes et irréductibles de* Spec (A) *sont confondues.*

PREUVE. Il suffit de montrer qu'une composante connexe est irréductible. D'après [16], la composante connexe C_P d'un idéal premier P de A est l'intersection des ouverts et fermés de Spec (A) contenant P: soit $C_P = \bigcap_{i \in I} O_i$, où O_i désigne un ouvert et fermé contenant P. Soient $D(f)$ et $D(g)$ deux ouverts de la base de Spec (A) tels que $C_P \cap D(f) \neq \varnothing$ et $C_P \cap D(g) \neq \varnothing$. Puisque

Spec (A) est extrémal, $\overline{D(f)}$ et $\overline{D(g)}$ sont des ouverts et fermés. La relation des composantes connexes étant une équivalence, on en déduit que C_P est contenu dans $\overline{D(f)} \cap \overline{D(g)}$. La famille de parties proconstructibles $\{O_i, D(f), D(g)\}_{i \in I}$ a la propriété d'intersection finie. En effet de $O_1 \cap \ldots \cap O_p \cap D(f) \cap D(g) = \varnothing$ on tire:

$$C_P \subset \overline{D(f)} \cap \overline{D(g)} \cap O_1 \cap \ldots \cap O_p \text{ entraine } C_P \text{ est vide ,}$$

ce qui est absurde. Il en résulte que C_P est irréductible, puisque $C_P \cap D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$.

Remarque. On pourrait seulement faire l'hypothèse: A est de Baer faible. En effet, les ouverts de la base et leurs adhérences servent seuls dans la preuve et un anneau réduit est de Baer faible si et seulement si l'adhérence de tout ouvert de la base du spectre est un ouvert.

Il est remarquable que l'on puisse, pour un anneau réduit, construire une enveloppe de Baer (resp. Baer faible). Cette construction a été faite par certains des auteurs cités au début du paragraphe.

Si A est un anneau réduit, l'anneau complet des fractions de A, de Utumi–Lambek, soit $Q(A)$, est un anneau de Baer plat (voir [15]).

Proposition 6. [19] *Soit A un anneau réduit, l'intersection $B(A)$ des sous-anneaux de Baer de $Q(A)$, contenant A comme sous-anneau, est un anneau de Baer. De plus $B(A)$ est le sous anneau de $Q(A)$ engendré par A et les idempotents de $Q(A)$.*

Dans [12], [19], [28], [29], on montre que la construction est fonctorielle pour certaines classes de morphismes, les classes n'étant pas à priori les mêmes pour les articles cités. Nous allons simplifier et unifier les constructions.

Rappelons qu'un ensemble $\mathscr{F}$ topologisant et idempotent d'idéaux d'un anneau est dit un site. De plus si f: $A \to A'$ est un morphisme d'anneaux et $\mathscr{F}$ un site sur A, on désigne par $f(\mathscr{F})$ le site des idéaux I' de A' tels que $f^{-1}(I') \in \mathscr{F}$. Si $\mathscr{F}'$ est un site sur A' tel que $f(\mathscr{F}) \subset \mathscr{F}'$, il existe un diagramme commutatif d'anneaux:

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{\mathscr{F}} & \rightarrow & A'_{\mathscr{F}'} \end{array}$$

Si A est un anneau réduit, on désigne par I^0 l'annulateur d'un idéal (ou d'une partie) I de A. Un idéal I de A est dit dense si $I^0 = 0$, l'ensemble des idéaux denses de A est un site $\mathscr{D}$ tel que $Q(A)=A_{\mathscr{D}}$. Enfin, si $f\colon A \to A'$ est un morphisme d'anneaux, on désigne par $\mathscr{D}A'$ l'ensemble des $a' \in A'$ tels que $(0:a')_A \in \mathscr{D}$.

Définition 2. Soit $f\colon A \to A'$ un morphisme d'anneaux, f est dit de Baer si pour tout couple (I, J) d'idéaux de A on a: $I^0=J^0$ implique $f(I)^0=f(J)^0$. Si, de plus, f est injectif, f est dit essentiel si pour tout idéal I' de A' non nul, on a $f^{-1}(I')$ non nul.

Il est bien connu que tout sous-anneau de $Q(A)$ est essentiel sur A, s'il contient A comme sous-anneau.

Le composé de deux morphismes de Baer est de Baer. Si $\{A \to B_k\}_{k\in K}$ est une famille de morphismes de Baer, le morphisme canonique $A \to \prod_{k\in K} B_k$ est un morphisme de Baer.

Proposition 7. *Soit $f\colon A \to A'$ un morphisme d'anneaux.*

1) *Si A est réduit et f essentiel, alors A' est réduit et f est de Baer.*
2) *Si A et A' sont réduits et f ouvert, alors f est de Baer.*
3) *Si f est un épimorphisme plat injectif, il est essentiel.*
4) *Si f est un morphisme plat content* [20], *il est de Baer.*
5) *Soit $g\colon A' \to A''$ un morphisme entre anneaux réduits et supposons A réduit, si f est essentiel et $g\circ f$ de Baer, alors g est un morphisme de Baer.*
6) *Soit $g\colon A' \to A''$ un morphisme entre anneaux réduits et supposons A réduit, si g est injectif et $g\circ f$ de Baer, alors f est un morphisme de Baer.*
7) *Si A' est un A-module projectif, alors f est universellement un morphisme de Baer.*

Preuve.

1) Il est clair que A' est réduit. Soient I et J des idéaux de A tels que $I^0=J^0$ et supposons que $a'I=0$, où $a' \in A'$. Si $a'J$ est non nul, soit $j \in J$ tel que $a'j \neq 0$. Puisque f est essentiel, il existe $b' \in A'$ tel que $a'b'j=a \in A-\{0\}$. Mais de $aI=0$, on déduit: $aj=0$, puis $(a'b'j)^2=0$, ce qui est une contradiction puisque A' est réduit.

2) Dire que ${}^tf$ est ouverte signifie que pour toute partie X de Spec (A) on a:

$$ {}^tf^{-1}(\bar{X}) = \overline{{}^tf^{-1}(X)}\,. $$

Soit alors $X=D(I)$ un ouvert de Spec (A), de $\bar{X}=V(I^0)$, puisque A est réduit, on déduit:

$$ {}^tf^{-1}(\overline{D(I)}) = \overline{{}^tf^{-1}(D(I))} \text{ entraine } V(I^0A') = V((IA')^0)\,. $$

Il en résulte que $(IA')^0 = \sqrt{I^0A'}$, puisque dans un anneau réduit un idéal annulateur est semi-premier. Il est alors clair que f est de Baer.

3) Cette assertion résulte de: si f est un épimorphisme plat, pour tout idéal I' de A' on a la relation $I' = f^{-1}(I')A'$.

4) Il est prouvé dans [20] que si M est un A-module plat content, pour tout couple (I, J) d'idéaux de A on a: $(I:J)M = (IM:J)_M$.

5) La proposition suivante montre qu'un morphisme entre anneaux réduits est de Baer si et seulement si l'extension d'un idéal dense est un idéal dense. Soit donc I' idéal de A' qui soit dense, on vérifie en utilisant l'essentialité de f que $0:f^{-1}(I') = A \cap 0:I' = 0$. Puisque $g \circ f$ est de Baer, $f^{-1}(I')A''$ est dense dans A'', mais de $f^{-1}(I')A'' \subset I'A''$ résulte: $I'A''$ est dense. Ainsi g est un morphisme de Baer.

6) Soit I idéal dense de A, alors IA'' est dense. Puisque g est injective on a: $0:IA' = A' \cap (IA'.A'')^0 = 0$, d'où IA' est dense et f est de Baer.

7) Il suffit de remarquer qu'un module projectif est plat content.

Proposition 8. *Soit $f: A \to A'$ un morphisme entre anneaux réduits. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) *f est un morphisme de Baer.*
2) *Si I est un idéal dense de A, alors IA' est un idéal dense de A'.*
3) *Pour tout couple (I, J) d'idéaux de A on a: $I^0 \subset J^0$ entraine $f(I)^0 \subset f(J)^0$.*
4) *Pour tout idéal I de A on a: $(I^0A')^{00} = (IA')^0$.*
5) *L'ensemble $\mathscr{D}A'$ est réduit à 0.*
6) *Il existe un morphisme de Baer $Q(A) \to Q(A')$ rendant le diagramme ci-dessous commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q(A) & \rightarrow & Q(A') \end{array}$$

Preuve.

1) implique 2): en effet $I^0 = 0$ entraine $f(I)^0 = 0$.

2) implique 4): soit I un idéal de A, l'idéal $I + I^0$ est dense car A est réduit. On en déduit $(IA')^0 \cap (I^0A')^0 = 0$, ou encore: $(IA')^0 \subset (I^0A')^{00}$. L'inclusion en sens contraire se déduit de $IA' \subset (I^0A')^0$.

4) implique 1) et 3) implique 1) sont évidents.

1) implique 3): si I et J sont des idéaux d'un anneau réduit $I^0 \subset J^0$ équivaut à $J^0 = (IJ)^0$.

2) implique 5): soit $a' \in \mathscr{D}A'$, alors $I = (0:a')_A$ est un idéal dense de A, de la densité de IA' et de $Ia' = 0$, on déduit $a' = 0$.

5) implique 2): supposons $\mathscr{D}A' = 0$ et soit I un idéal dense de A, soit $a' \in A'$

tel que $a'IA'=0$, de $I\subset(0:a')_A$ on déduit $a'\in\mathscr{D}A'=0$. Ainsi IA' est dense dans A'.

2) implique 6): soit $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$) le site des idéaux denses de A (resp. A'), il est clair que $f(\mathscr{D})\subset\mathscr{D}'$, d'où le diagramme commutatif. La proposition 7–5) montre alors que $Q(A)\to Q(A')$ est de Baer.

6) implique 1): cela résulte de la proposition 7–6).

Remarques.

L'équivalence de 1) et 6) de la proposition 8 généralise un résultat de [30, page 395].

Il existe des morphismes de Baer non essentiels: soit A un anneau, le morphisme canonique $A\to A[X]$, étant universellement ouvert, est universellement de Baer. Mais $(X)\cap A=0$, donc ce morphisme n'est pas essentiel. On peut enlever, comme dans [22], l'hypothèse d'injectivité dans la définition d'un morphisme essentiel. Avec cette définition, le même article montre que les morphismes $f\colon A\to A'$ universellement essentiels sont ceux tels que $A/\operatorname{Ker} f\to A'$ soit un épimorphisme plat.

Dans la proposition 8 si, de plus f est injectif, il en est de même de $Q(A)\to Q(A')$.

Corollaire 1. [29] *Soit $f\colon A\to A'$ un morphisme de Baer entre anneaux réduits, il existe un morphisme de Baer unique $B(f)\colon B(A)\to B(A')$ tel que le diagramme d'anneaux*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B(A) & \to & B(A') \end{array}$$

soit commutatif.

Preuve. L'existence de $B(f)$ est claire si on utilise la définition: $B(A)=A[\operatorname{Bool}(Q(A))]$ et la proposition 8–6). D'autre part $A\to B(A)$ est un morphisme essentiel, la proposition 7 montre que $B(f)$ est un morphisme de Baer. Pour l'unicité: un élément de $B(A)$ est du type $\sum_{i=1}^n a_ie_i$, où $a_i\in A$ et $e_i\in\operatorname{Bool}(Q(A))$, il suffit donc de déterminer $B(f)(e)$ où e est un idempotent. Soit (e) dans $Q(A)$, c'est un idéal annulateur. Puisque $A\to B(A)$ est essentiel, il provient d'un annulateur unique $0:I$ de A. Puisque le diagramme est commutatif et constitué de morphismes de Baer, nécessairement $B(f)(e)$ provient de $0:IA'$ par $A'\to B(A')$.

On peut faire un calcul explicite pénible: un idempotent de $Q(A)$ est du type $\hat{e}_I$ où I est un idéal de A et $e_I\colon I^0+I^{00}\to A$ est l'homomorphisme de A-modules déterminé par $e_I(a+b)=a$, avec des notations claires, on a alors $B(f)(\hat{e}_I)=\hat{e}_{IA'}$.

Rappelons que, si A est un anneau réduit, il existe un sous-anneau $P(A)$ de $Q(A)$, ayant A comme sous-anneau, tel que:

a) $A \to P(A)$ est l'enveloppe épimorphe de A (voir [30]) et $A \to P(A)$ est un bimorphisme essentiel.

b) $P(A)$ est l'intersection des sous-anneaux plats de $Q(A)$, ayant A comme sous-anneaux et $P(A)$ est un anneau plat.

On sait que dans un anneau plat, tout élément $a \in A$ possède un quasi inverse a^* déterminé par les relations $a^2a^* = a$ et $a(a^*)^2 = a^*$, de manière unique.

Corollaire 2. *Soit A un anneau réduit et soit A^* l'ensemble des quasi inverses dans $Q(A)$ des éléments de A, alors $P(A) = A[A^*]$.*

Si f: $A \to A'$ est un morphisme de Baer entre anneaux réduits, il existe un morphisme de Baer $P(f)$: $P(A) \to P(A')$ rendant le diagramme d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(A) & \to & P(A') \end{array}$$

commutatif.

Preuve. Il est clair que $A[A^*]$ est contenu dans $P(A)$, puisque $P(A)$ est plat, contient A et le quasi inverse d'un élément est unique.

Soit $T(A)$ l'anneau plat universel de [21]. Un examen de la construction de $T(A)$ montre que tout élément de $T(A)$ s'exprime sous la forme $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^*$, où $a_i \in A$ et b_i^* est le quasi inverse d'un élément b_i de A. De par la propriété universelle de $A \to T(A)$, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & T(A) \arrow[d] \\ & P(A) \end{tikzcd}$$

Mais $A \to P(A)$ étant un épimorphisme, il en est de même de $T(A) \to P(A)$. Or $T(A)$ étant plat, $T(A) \to P(A)$ est surjectif. Pour terminer la preuve il suffit de remarquer qu'un morphisme d'anneaux transforme un quasi inverse en quasi inverse. L'existence de $P(f)$ résulte alors de la proposition 8–6), le fait que $P(f)$ soit de Baer résultant de la proposition 7.

Remarque. L'existence de $P(f)$ est obtenu dans [18] par une autre méthode, pour un morphisme f injectif et sous une hypothèse équivalente à celle du corollaire.

Lorsque A est un anneau réduit, l'homomorphisme $A \to B(A)$, qui est entier, donne déja de bons renseignements sur Spec $(B(A))$. On peut préciser un peu plus, en particulier l'application Spec $(Q(A)) \to$ Spec $(B(A))$. Notons dans [18] une interprétation de Spec $(Q(A))$ comme le spectre de l'algèbre Booléienne des annulateurs de A

PROPOSITION 9. *Soit A un anneau réduit:*
1) *Pour tout $Q \in$ Spec $(B(A))$, le morphisme $A/Q \cap A \to B(A)/Q$ est un isomorphisme.*
2) *L'homomorphisme $B(A) \to Q(A)$ vérifie la condition C de [7], est plat et Spec $(Q(A))$ est homéomorphe à Min $B(A)$.*

PREUVE. 1) Il est clair que le morphisme est injectif. Il est surjectif car tout élément de $B(A)$ s'exprime sous la forme $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ où $a_i \in A$ et $e_i \in$ Bool $(B(A))$ et dans $B(A)/Q$ les classes des idempotents sont 0 ou 1.

2) Désignons par $\varphi: B(A) \to Q(A)$, alors φ vérifie la condition C: pour tout $q \in Q(A)$, il existe un élément inversible u de $Q(A)$ et un élément b de $B(A)$ tels que $\varphi(b)u = q$. En effet, dans un anneau plat, tout élément est le produit d'un idempotent et d'un inversible. D'après [7, page 197], ${}^t\varphi$ est un homéomorphisme de Spec $(Q(A))$ sur son image. Puisque φ est injective, nous avons Min $B(A) \subset {}^t\varphi(\text{Spec}\,(Q(A)))$. Soit $P' \in$ Spec $(Q(A))$, il est minimal: pour tout x' élément de $P' \cap B(A)$, il existe $s' \notin P'$ tel que $s'x' = 0$; mais de $s' = e'u'$ où e' est idempotent et u' inversible, on déduit: $e' \in B(A) - P'$ et $e'x' = 0$; Ainsi $P' \cap B(A)$ est un idéal premier minimal. La platitude de φ en résulte: si $P' \in$ Spec $(Q(A))$, alors $B(A)_{P' \cap B(A)}$ est un corps, puisque $B(A)$ est réduit et $P' \cap B(A)$ est un idéal premier minimal.

IV. Stabilité de la notion d'anneau de Baer (ou d'anneau à spectre minimal compact) à travers les morphismes d'anneaux.

PROPOSITION 10. *Soit $f: A \to A'$ un épimorphisme plat injectif entre anneaux réduits.*
1) *Si A est un anneau de Baer, alors A' est un anneau de Baer.*
2) *Si A est un anneau à spectre minimal compact, il en est de même pour A' et réciproquement.*

PREUVE. Spec (A') est homéomorphe à ${}^tf(\text{Spec}\,(A'))$ et de plus f est dominant, donc Spec $(A) = \overline{{}^tf(\text{Spec}\,(A'))}$. Si A est un anneau de Baer, Spec (A) est extrémal et toute partie dense d'un espace extrémal est un espace extrémal: il en résulte que A' est un anneau de Baer.

Pour montrer 2), on remarque que la restriction de ${}^tf$ à Min A' est un homéomorphisme de Min A' sur Min A.

COROLLAIRE. *Si A est un anneau de Baer, l'épimorphisme plat injectif maximal $A \to M(A)$ de* [17] *est tel que $M(A)$ est un anneau plat de Baer et $P(A) = M(A)$.*

PREUVE. C'est une conséquence de [21] proposition 7: A est un anneau à spectre minimal compact, d'où $M(A)$ est un anneau plat. De $P(A) \supset M(A)$ et en utilisant la définition de $P(A)$ par les anneaux plats, on en déduit que $P(A) = M(A)$.

DÉFINITION 3. Soit $f\colon A \to A'$ un morphisme d'anneaux, on dit que f est minimalisant si ${}^t f(\operatorname{Min} A')$ est contenu dans $\operatorname{Min} A$.

Il y a de nombreux exemples de morphismes minimalisants. On aura un exemple dans l'appendice. Les morphismes générisants, en particulier les morphismes plats, sont minimalisants.

Soit $f\colon A \to A'$ un morphisme entre anneaux réduits qui soit de Baer, si $\operatorname{Min} A$ est compact, alors f est minimalisant: on considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q(A) & \to & Q(A') \end{array}$$

où $A \to Q(A)$ est plat puisque $\operatorname{Min} A$ est compact. Soit $P' \in \operatorname{Min} A'$, par injectivité de $A' \to Q(A')$, il se remonte en un idéal premier minimal Q' de $Q(A')$. Puisque $A \to Q(A')$ est minimalisant, on voit que $P' \cap A$ appartient à $\operatorname{Min} A$.

PROPOSITION 11. *Soit $f\colon A \to A'$ un morphisme entier minimalisant, si* $\operatorname{Min} A$ *est compact, il en est de même de* $\operatorname{Min} A'$.

PREUVE. Puisque f est entière, ${}^t f$ est fermée. Elle est propre au sens de [3]: en effet la fibre ${}^t f^{-1}(P)$ pour tout $P \in \operatorname{Spec}(A)$ est quasi-compacte. Il en résulte que l'image réciproque de tout quasi-compact de $\operatorname{Spec}(A)$ par ${}^t f$ est un quasi-compact de $\operatorname{Spec}(A')$. Puisque f est minimalisant, on a $\operatorname{Min} A' \subset {}^t f^{-1}(\operatorname{Min} A)$. D'autre part, si ${}^t f(P') \in \operatorname{Min} A$, soit $M' \in \operatorname{Min} A'$ tel que $M' \subset P'$, on a alors ${}^t f(P') = {}^t f(M')$ et, par incomparabilité, on obtient $P' = M'$. Ainsi $\operatorname{Min} A' = {}^t f^{-1}(\operatorname{Min} A)$ est une partie compacte.

PROPOSITION 12. *Soit $f\colon A \to A'$ un morphisme d'anneaux, où A est réduit et ${}^t f$ surjective.*

1) *Si f est ouverte et A' un anneau de Baer, alors A est un anneau de Baer.*

2) *Si f est minimalisante et* $\operatorname{Min} A'$ *compact, alors* $\operatorname{Min} A$ *est compact.*

Preuve.

1) Pour tout ouvert O de Spec (A), on a ${}^t f^{-1}(\bar{O}) = \overline{{}^t f^{-1}(O)}$, or $V = \overline{{}^t f^{-1}(O)}$ est un ouvert de Spec (A'), d'où ${}^t f(V) = \bar{O}$ est un ouvert de Spec (A): ainsi Spec (A) est extrémal.

2) Puisque ${}^t f$ est surjective, elle est dominante: $\operatorname{Min} A \subset {}^t f(\operatorname{Min} A')$. D'où $\operatorname{Min} A = {}^t f(\operatorname{Min} A')$ entraine $\operatorname{Min} A$ est compact.

Remarques.

a) Dans la proposition 12–1), on ne peut remplacer l'hypothèse f ouverte par f générisante, ou minimalisante: soit A un anneau Booléien non complet, $A \to Q(A)$ est donc un morphisme plat entre anneaux plats. En particulier le morphisme spectral associé est surjectif. D'après [26, page 1136], un anneau plat est de Baer si et seulement si l'algèbre Booléienne de ses idempotents est complète.

b) L'homomorphisme $A \to B(A)$ est de Baer: on en déduit que si le but d'un morphisme de Baer est un anneau de Baer, la source n'est pas forcément un anneau de Baer.

c) Le morphisme $A \to A[X]$ a un morphisme spectral surjectif et ouvert. Si A est un anneau réduit, A est de Baer si et seulement si $A[X]$ est un anneau de Baer.

d) Soit K un corps, le morphisme $K \to K[X, Y]/(XY)$ est de Baer, de source un anneau de Baer, mais le but n'est pas un anneau de Baer (faible).

e) Un morphisme essentiel n'est pas forcément minimalisant: soit $A \to B(A)$, où A est réduit et $\operatorname{Min} A$ non compact, si $A \to B(A)$ était minimalisant l'image de Spec $(Q(A))$ dans Spec (A) serait égale à $\operatorname{Min}(A)$ (proposition 9), d'où une contradiction.

Les notions de morphisme essentiel ou de Baer sont liées à une notion topologique provenant de [6] ou [33].

Définition 4. Soit $\varphi: X \to X'$ une application continue entre espaces topologiques, on dit que φ est minimale si pour tout fermé F de X tel que $F \neq X$ on a $\varphi(F) \neq \varphi(X)$.

Si φ est injective, il est clair qu'elle est minimale. Les résultats principaux sur cette notion sont résumés par la proposition suivante.

Proposition 13. *Soit $\varphi: X \to X'$ une application continue entre espaces topologiques.*

1) *Si X est un espace séparé et φ est ouverte minimale, alors φ est injective.*
2) *Si X est compact et X' compact extrémal et si φ est surjective minimale, alors φ est un homéomorphisme.*

PROPOSITION 14. *Soit f: $A \to A'$ un morphisme injectif entre anneaux réduits.*

1) *Si f est essentielle, alors ${}^tf$ est minimale.*
2) *Si ${}^tf$ est fermée et minimale, alors f est essentielle.*

PREUVE. Claire.

Par abus de langage, nous dirons qu'un morphisme d'anneaux est minimal si le morphisme spectral associé est minimal pour la topologie de Zariski.

Un épimorphisme f d'une catégorie est dit essentiel si pour tout morphisme g tel que fg soit un épimorphisme, alors g est un épimorphisme. S'il existe pour un objet A d'une catégorie un épimorphisme essentiel $P \to A$, où P est un objet projectif, on dit que $P \to A$ est une couverture projective de A.

PROPOSITION 15. *Soit A un anneau, le morphisme composé $A \to T(A) \to B(T(A))$ induit un morphisme spectral* Spec $(B(T(A))) \to$ Spec (A) *qui est une couverture projective de* Spec (A).

PREUVE. Il est facile de voir que les épimorphisme essentiels de Spectr sont les surjections, minimales pour la topologie constructible. D'autre part, on sait que Spec $(T(A)) \to$ Spec (A) est une bijection. L'anneau $B(T(A))$ est plat, puisque $B(T(A))$ est entier sur $T(A)$; il en résulte que Spec $(B(T(A)))$ est un espace Stonien, donc un objet projectif de Spectr, comme on l'a déjà remarqué. Enfin Spec $(B(T(A))) \to$ Spec $(T(A))$ est surjective et minimale, puisque $T(A) \to B(T(A))$ est entière essentielle.

PROPOSITION 16. *Soit f: $A \to A'$ un morphisme d'anneaux.*

1) *Il existe un idéal I' de A', tel que ${}^tf$ restreinte à $V(I')$ soit minimale et tel que* ${}^tf(V(I')) = {}^tf(\text{Spec}\,(A'))$.
2) *Il existe un morphisme d'anneaux f': $A' \to A''$ tel que ${}^t(f' \circ f)$ soit minimale pour la topologie constructible et tel que* ${}^t(f' \circ f)$ (Spec $(A'')) = {}^tf$(Spec (A')).

PREUVE.

1) C'est un plagiat de [33, page 304, th. 14-2-1]. Soit $\mathscr{F}$ la famille des fermés F' de Spec (A') tels que ${}^tf(F') = {}^tf(\text{Spec}\,(A'))$. On ordonne cette famille non vide par inclusion. Soit $\{F'_i\}_{i\in I}$ une sous famille totalement ordonnée de $\mathscr{F}$, le fermé $F' = \bigcap_{i\in I} F'_i$ est tel que ${}^tf(F') = {}^tf(\text{Spec}\,(A'))$: soit $P \in {}^tf(\text{Spec}\,(A'))$ et soit $X_i = {}^tf^{-1}(P) \cap F'_i$; la famille de parties proconstructibles $\{X_i\}_{i\in I}$ a la propriété d'intersection finie; si P' est dans l'intersection des X_i, on obtient $P = {}^tf(P')$, où $P' \in \bigcap_{i\in i} F'_i$. Ainsi $\mathscr{F}$ possède un élément minimal $V(I')$ qui donne le résultat cherché.

2) On applique directement [33], pour la topologie constructible.

Proposition 17. *Soit $f: A \to A'$ un morphisme d'anneaux tel que* ${}^t f^{-1}(\operatorname{Min} A) = \operatorname{Min} A'$ (*resp.* ${}^t f^{-1}(\operatorname{Gold}(A)) = \operatorname{Gold}(A')$) *et tel que la restriction de* ${}^t f$ *à* $\operatorname{Min} A'$ (*resp.* $\operatorname{Gold}(A')$) *soit injective, alors f est minimal.*

Preuve. Les parties Min et Gold d'un spectre sont denses. Soit par exemple $X' = \operatorname{Min} A'$ et $X = \operatorname{Min} A$ et supposons que ${}^t f(V(a')) = {}^t f(\operatorname{Spec}(A'))$, on a alors ${}^t f(X') \subset {}^t f(V(a'))$. Soit $P' \in X'$, alors ${}^t f(P') = {}^t f(Q')$ avec $a' \in Q'$; puisque $P' \in X'$, on a ${}^t f(Q') \in X$ d'où $Q' \in X'$; on en déduit que $Q' = P'$ et $a' \in P'$: on obtient ainsi $X' \subset V(a')$, d'où la preuve puisque X' est dense.

Remarques et exemples.

1) Pour tout anneau A, le morphisme $A \to A[X]$ vérifie l'une des conditions de la proposition 17, il est donc universellement minimal. On a déjà vu que cependant il n'est pas essentiel.

2) On peut renforcer l'exemple précédent: il existe un morphisme f d'anneaux non essentiel, mais tel que ${}^t f$ soit injectif. Considérons un anneau intègre A qui ne soit pas un corps. Soit $f: A \to T(A)$, dont on sait que ${}^t f$ est bijectif. Une proposition de [26] affirme qu'étant donné un morphisme essentiel $A \to A'$, où A est un anneau de Baer, alors $\operatorname{Bool}(A) = \operatorname{Bool}(A')$. Si on suppose f essentiel, soit $a \in A - \{0\}$ et soit $a' \in T(A)$ son quasi inverse; puisque aa' est un idempotent, il appartient à A: d'où l'égalité $a(1 - aa') = 0$ dans A. Alors $aa' = 1$ montre que a n'est dans aucun idéal premier de $T(A)$, donc n'appartient à aucun élément de $\operatorname{Spec}(A)$: A est un corps.

3) On retrouve à l'aide des propositions 14 et 17 une proposition de [3]: un morphisme entier injectif entre anneaux intègres est essentiel.

4) La proposition 16 - 1) ressemble à celle bien connue: si $A \to A'$ est un morphisme d'anneaux, injectif, (entier), il existe un idéal I' de A' tel que $I' \cap A = 0$, maximal pour cette propriété, tel que de plus $A \to A' \to A'/I'$ soit essentiel (entier). La proposition 16 est plus générale et plus précise par le renseignement qu'elle donne sur le spectre de A'/I'.

5) Il y a un autre procédé ("par en dessous") pour produire à partir d'un morphisme injectif $A \to A'$ (resp. injectif, entier) un morphisme essentiel (resp. entier essentiel): par application du théorème de Zorn, on obtient $A \to B \to A'$ où $A \to B$ est essentiel (resp. entier essentiel). On peut se demander quels sont les liens entre les constructions.

6) Si un morphisme est minimal pour la topologie constructible, il l'est pour celle de Zariski. La réciproque est fausse: $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}[X]$ est minimal, mais le fermé proconstructible $D(X)$, différent de $\operatorname{Spec}(\mathbf{Z}[X])$, donne ${}^t f(D(X)) = \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$.

7) Voici un exemple, montrant qu'un morphisme entier, essentiel, plat, de présentation finie (donc ouvert) n'a pas forcément un morphisme spectral

injectif: l'hypothése X est séparé de la proposition 13 - 1) ne peut donc être enlevée, même pour Spectr. Soit $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}[i]$, où $i^2 = -1$, le morphisme canonique. On sait qu'il y a des éléments de Spec ($\mathbf{Z}$) non inertes dans $\mathbf{Z}[i]$, ainsi ${}^t\!f$ n'est pas injective. Il reste à montrer que f est essentiel, ou, ce qui revient au même, f est minimal. Ce dernier point résulte du [4, lemme page 309]:

LEMME 2. *Soit $f: A \to A'$ un morphisme d'anneaux, tel que A' soit un A-module ayant une base finie: pour $a' \in A'$ on a ${}^t\!f(V(a')) = V(N(a'))$, où N désigne la norme.*

8) Un morphisme minimal, entre anneaux réduits, n'est pas forcément de Baer: il suffit de considérer $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$. De même un morphisme de Baer n'est pas forcément minimal: soit $\mathbf{Z} \xrightarrow{f} \mathbf{Z}[X]/((X-1)(X-2))$; ce morphisme est plat, de présentation finie, donc ouvert, il est donc de Baer. Mais un calcul montre que $N(a+b\bar{X}) = a^2 + 3ab + 2b^2$, d'où ${}^t\!f(V(1-\bar{X})) = \mathrm{Spec}\,(\mathbf{Z})$.

On termine ce paragraphe par quelques propriétés de transfert.

PROPOSITION 18. *Soit $f: A \to A'$ un morphisme essentiel. On suppose que A est un anneau de Baer et que* Min A' *est compact, alors ${}^t\!f_M$:* Min $A' \to$ Min A *existe, est un homéomorphisme et A' est un anneau de Baer.*

En particulier si $f: A \to A'$ est un morphisme entier essentiel et A un anneau de Baer, les mêmes conclusions sont valables. De plus, pour tout $P \in$ Spec (A), *l'homomorphisme entier $A_P \to A'_P$ est injectif, sans torsion, et A_P, A'_P sont des anneaux intègres.*

PREUVE. Puisque f est essentiel et A est réduit, l'anneau A' est réduit. Puisque Min A est compact et f un morphisme de Baer entre anneaux réduits, f est minimalisant: d'où l'existence de ${}^t\!f_M$. L'injectivité de f entraine la surjectivité de ${}^t\!f_M$; on remarque alors que Min A est extrémal compact et Min A' compact, pour appliquer la proposition 13-2), il reste à montrer que ${}^t\!f_M$ est minimale. Or ${}^t\!f$ est minimale et le spectre minimal est dense dans le spectre, il en résulte facilement que ${}^t\!f_M$ est minimale. Ainsi ${}^t\!f_M$ est un homéomorphisme et Min A' est extrémal compact. D'après la proposition 4-b), A' est un anneau de Baer si les composantes irréductibles sont disjointes dans Spec (A'). Soient $Q' \in$ Spec (A') et P'_1, P'_2 des éléments de Min A' tels que $P'_1 \subset Q'$ et $P'_2 \subset Q'$. L'anneau A étant de Baer et ${}^t\!f(P'_1)$, ${}^t\!f(P'_2)$ étant dans Min A, on a ${}^t\!f(P'_1) = {}^t\!f(P'_2)$, d'où $P'_1 = P'_2$.

Si maintenant, $f: A \to A'$ est entière essentielle, A étant un anneau de Baer, la proposition 11 montre que Min A' est compact. On peut donc appliquer ce qui précéde. Puisque A est un anneau de Baer, A_P est intègre. Considérons l'injection entière $A_P \to A'_P$, d'après la remarque 3 suivant la proposition 17, si A'_P est intègre, cet homomorphisme est essentiel. Or Spec (A'_P) est l'ensemble des éléments P' de Spec (A') tels que $P' \cap A \subset P$. De plus $\operatorname{Min} A'_P = \operatorname{Spec}(A'_P) \cap \operatorname{Min} A'$; si P' est dans $\operatorname{Min} A'$ avec $P' \cap A \subset P$, alors P' est unique, puisque ${}^t f_M$ est une injection et A un anneau de Baer. Il en résulte que A'_P est un anneau intègre, puisque A' est un anneau réduit. Il est alors facile de voir qu'un morphisme essentiel entre anneaux intègres est sans torsion.

PROPOSITION 19. *Soit le carré cocartésien*

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \to & A \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ A' & \to & B \end{array}$$

de la catégorie des anneaux. On suppose $A_0 \to A'$ est un morphisme injectif, plat, radiciel et que $A_0 \to A$ est un morphisme plat.

a) *Si* $\operatorname{Min} A$ *est compact, il en est de même de* $\operatorname{Min} B$. *Dans ce cas les espaces* $\operatorname{Min} A$, $\operatorname{Min} B$ *et* $\operatorname{Min} A' \underset{\operatorname{Min} A_0}{\times} \operatorname{Min} A$ *sont homéomorphes.*

b) *Si A est un anneau de Baer faible (resp. de Baer) il en est de même pour B_{red}.*

PREUVE. Puisque le carré est cocartésien, tous les morphismes de ce carré sont plats. Le morphisme φ est radiciel et injectif; on en déduit l'existence et la bijectivité de ${}^t\varphi_M$.

a) Si $\operatorname{Min} A$ est compact, il est proconstructible ($\operatorname{Min} A$ est un G-fermé, rétrocompact (voir [23])). De ${}^t\varphi^{-1}(\operatorname{Min} A) = \operatorname{Min} B$, on déduit $\operatorname{Min} B$ est proconstructible, donc compact. Ainsi ${}^t\varphi_M$ est un homéomorphisme. Le lemme VI 3 de [22] s'énonce:

Soit $f\colon A \to B$ un morphisme d'anneaux, les propriétés suivantes sont équivalentes:

α) *les extensions résiduelles de f sont radicielles.*

β) *Pour tout morphisme d'anneaux $A \to C$ le carré*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec}(B \otimes_A C) & \to & \operatorname{Spec}(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec}(C) & \longrightarrow & \operatorname{Spec}(A) \end{array}$$

est cartésien dans la catégorie des ensembles.

Dans les hypothèses de la proposition, on obtient:

$$\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A') \underset{\operatorname{Spec}(A_0)}{\times} \operatorname{Spec}(A)$$

est bijectif continu. On en déduit une bijection continue de $\operatorname{Min} B$ dans

$$\operatorname{Min} A' \underset{\operatorname{Min} A_0}{\times} \operatorname{Min} A ,$$

or ce dernier espace est un sous espace (fermé) de l'éspace séparé $\operatorname{Min} A' \times \operatorname{Min} A$. Ainsi

$$\operatorname{Min} B \to \operatorname{Min} A' \underset{\operatorname{Min} A_0}{\times} \operatorname{Min} A$$

est un homéomorphisme, puisque $\operatorname{Min} B$ est compact.

b) Un anneau réduit est de Baer faible (resp. de Baer) si et seulement si les composantes irréductibles de $\operatorname{Spec}(A)$ sont disjointes et $\operatorname{Min} A$ est compact (resp. $\operatorname{Min} A$ est Stonien). D'après a), il suffit donc de montrer que deux idéaux premiers minimaux de A sont comaximaux: soient M'_1 et M'_2 des éléments de $\operatorname{Min} B$, contenus dans $P' \in \operatorname{Spec}(B)$, on obtient ${}^t\varphi(M'_1) = {}^t\varphi(M'_2)$, puisque A est de Baer faible. On conclut par l'injectivité de ${}^t\varphi$.

La proposition 19 généralise et compléte des résultats du début de [31]. On y montre, en particulier, que si K et K' sont des extensions d'un corps k, alors $(K \otimes_k K')_{\text{red}}$ est un anneau de Baer faible. Ce dernier résultat ne rentre pas dans le cadre de la proposition 19. Dans cette direction, on a la proposition:

PROPOSITION 20. *Soit le carré cocartésien*

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \to & A \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ A' & \to & B \end{array}$$

de la catégorie des anneaux, où A et B sont réduits.

On suppose que $A_0 \to A'$ est universellement de Baer (*par exemple libre*) *et entière*; *si* $\operatorname{Min} A$ *est compact, il en est de même pour* $\operatorname{Min} B$.

PREUVE. Le morphisme φ est entier et de Baer, il est minimalisant parce que $\operatorname{Min} A$ est compact. D'après la proposition 11, $\operatorname{Min} B$ est compact.

REMARQUES.

1) Considérons le diagramme commutatif de la proposition précédente et supposons $A_0 \to A'$ entière, universellement essentielle et φ injective, si A est un anneau de Baer, il en est de même pour B. En effet, le morphisme φ est fermé et essentiel, il est donc minimal et minimalisant. Par suite ${}^t\varphi_M$ est surjective minimale, $\operatorname{Min} B$ est un espace compact et $\operatorname{Min} A$ est un espace Stonien. La proposition 13 montre que ${}^t\varphi_M$ est un homéomorphisme. On termine alors comme dans la fin de la proposition 19, en utilisant cette fois l'injectivité de ${}^t\varphi_M$.

2) Dans la proposition 19, on ne peut enlever l'hypothèse $A_0 \to A'$ est radiciel, si l'on veut garder le résultat b). Soit l'anneau intègre $\mathbf{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2) = A$, le produit tensoriel $A \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, qui s'identifie à $\mathbf{C}[X, Y]/((X+iY)(X-iY))$, n'est pas un anneau de Baer faible: l'idéal maximal (X, Y) de $\mathbf{C}[X, Y]$, contient les idéaux premiers $(X+iY)$ et $(X-iY)$ qui sont différents. Le phénomène est lié à la séparabilité de $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$.

V. Sur les anneaux de Baer faible et les morphismes minimalisants.

On donne ici une construction de l'enveloppe de Baer faible d'un anneau réduit différente de celle de [14] et [29] et plus simple.

Soit A un anneau réduit et soit $E(A)$ l'ensemble des idempotents de $Q(A)$ associés aux éléments de A: si $a \in A$, les relations dans $Q(A)$, $a^2a^* = a$ et $a^{*2}a = a^*$ définissent de manière unique l'idempotent $e_a = aa^*$, associé à a, puisque $Q(A)$ est un anneau plat. En fait $E(A)$ est une partie multiplicative, puisque $e_ae_b = e_{ab}$. Soit $B_f(A)$ le sous anneau de $Q(A)$ engendré par A et $E(A)$: un élément de $B_f(A)$ est donc du type $\sum_{i=1}^n a_ie_{b_i}$, où $a_i \in A$ et $e_{b_i} \in E(A)$.

A) Soit B_1 un anneau de Baer faible, ayant A comme sous-anneau et $B_f(A)$ comme sur-anneau, alors $B_1 = B_f(A)$.

Il suffit de montrer qu'un idempotent e_a de $E(A)$ est dans B_1. Puisque B_1 est un anneau de Baer faible et a appartient à B_1, on obtient $(0\colon a)_{B_1} = B_1e$, où e est un idempotent de B_1; de $ea = 0$ on tire $ee_a = 0$. D'autre part, il existe un idéal I de A, dense, et tel que pour $i \in I$ on ait $i(1-e_a) \in A$; puisque $i(1-e_a)$ est dans B_1 et $(1-e_a)a = 0$ on a: $i(1-e_a) = qe$, ou encore, $i(1-e_a)(1-e) = 0$. Par densité de I, le produit $(1-e_a)(1-e)$ est nul. De $ee_a = 0$ et de $(1-e_a)(1-e) = 0$ on déduit: $1-e_a = e$ et, par suite, $e_a \in B_1$.

B) Désignons par $\overline{E(A)}$, la sous algèbre Booléienne de $\mathrm{Bool}(Q(A))$, engendrée par $E(A)$. Soit C l'ensemble des éléments de $Q(A)$ s'écrivant sous la forme $\sum_{i=1}^n a_ie_i$, où $n \in \mathbf{N}$, $a_i \in A$, $e_i \in \overline{E(A)}$ et les idempotents e_i vérifient $e_ie_j = \delta_{i,j}e_i$ ainsi que $\sum_{i=1}^n e_i = 1$. Alors C est un sous-anneau de Baer faible de $B_f(A)$ et contient A comme sous-anneau. En utilisant le fait que $E(A)$ est une partie multiplicative, on voit que C est contenu dans $B_f(A)$. Il est clair que A est contenu dans C. Si $u = \sum_{i=1}^n a_ie_i$ et $v = \sum_{j=1}^m b_jf_j$ sont des éléments de C, la famille $\{e_if_j\}_{i=1,\ldots,n;\, j=1,\ldots,m}$ est constituée d'idempotents orthogonaux, et de plus $\sum_{i,j} e_if_j = 1$. Il est alors clair que C est stable pour l'addition et la multiplication, puisque u et v s'expriment à l'aide des e_if_j et de plus, $e_if_j \in \overline{E(A)}$. L'anneau C est de Baer faible: soit $u = \sum_{i=1}^n a_ie_i$ un élément de C et considérons $(0\colon u)_C$; par orthogonalité on a: $(0\colon u)_C = \bigcap_{i=1}^n (0\colon a_ie_i)_C$. On sait que l'intersection de deux idéaux, chacun engendré par un idempotent, est égale au produit de ces idéaux. D'autre part, pour $e \in \overline{E(A)}$ et $a \in A$, l'élément $ae = ae + 0(1-e)$ est dans C, il suffit donc de montrer que $(0\colon ae)_C$ est engendré par un idempotent dans C. Mais $Q(A)$ est un anneau de Baer, dans $Q(A)$ nous avons $0{:}ae$ est engendré par $e_a \vee (1-e)$ (voir [27, proposition 1]). On constate alors que $e_a \vee (1-e)$ est dans C et donc: $(0{:}ae)_C = Ce_a \vee (1-e)$.

PROPOSITION 21. *Soit A un anneau réduit.*

1) *Il existe un anneau de Baer faible $B_f(A)$, ayant A comme sous-anneau. Tout anneau, compris entre A et $B_f(A)$, de Baer faible est égal à $B_f(A)$. L'anneau $B_f(A)$ n'est autre que $A[E(A)]$.*
2) *Tout anneau de Baer faible, ayant A comme sous-anneau et $Q(A)$ pour sur-anneau contient $B_f(A)$.*
3) *En particulier $B_f(A)$ est contenu dans $P(A)$ et l'anneau total des fractions de $B_f(A)$ est $P(A)$.*

PREUVE. On vient de montrer 1). La preuve de 2) est la même que celle de la partie A). L'anneau $B_f(A)$ a un spectre minimal compact et tout localisé en un idéal maximal est un anneau intègre, d'après [25], $\operatorname{Tot} B_f(A)$ est un anneau plat. De plus, de $B_f(A) \subset P(A)$ on tire $P(B_f(A)) = P(A)$. Ensuite, puisque $\operatorname{Min} B_f(A)$ est compact, on a les égalités: $\operatorname{Tot} B_f(A) = M(B_f(A)) = P(B_f(A))$, la première venant de ce que $\operatorname{Tot} B_f(A)$ est plat. D'où la preuve de 3).

D'après [14], $\operatorname{Min} B_f(A)$ est une compactification de $\operatorname{Min} A$. La proposition qui suit généralise ce résultat: la question, cependant, se pose de savoir si ce résultat permet d'obtenir des compactifications différentes de celles de [14], ou, ce qui revient au même, si la proposition suivante caractérise les compactifications de $\operatorname{Min} A$ (en termes de la catégorie des anneaux).

PROPOSITION 22. *Soit $f\colon A \to A'$ un morphisme entier essentiel entre anneaux réduits satisfaisant:*

(a) *Il existe un morphisme $g\colon A' \to A''$ tel que g est injectif et ${}^t(g \circ f)$ est injectif.*

Si $\operatorname{Min} A'$ *est compact, c'est une compactification de* $\operatorname{Min} A$.

PREUVE. Soit $P \in \operatorname{Min} A$, il se remonte en un idéal premier minimal de A', puisque f est injective. Cet idéal est unique parce que g et ${}^t(g \circ f)$ sont injectives. Il existe donc une application $\pi\colon \operatorname{Min} A \to \operatorname{Min} A'$, définie par le procédé précédent. Il est clair que π est injective, puisque ${}^tf \circ \pi$ est l'application identique. L'application π est continue; il suffit pour cela de montrer: pour $a' \in A'$, on a la relation $\pi^{-1}(V_M(a')) = {}^tf(V(a')) \cap \operatorname{Min} A$; en effet ${}^tf$ est fermée. Puisque ${}^tf \circ \pi$ est l'application identique, une inclusion est claire. Soit $P \in {}^tf(V(a')) \cap \operatorname{Min} A$ et soit $P' \in V(a')$ tel que ${}^tf(P') = P$, puisque f est entière et P minimal alors P' est un idéal premier minimal, comme on l'a vu dans une autre preuve. On en déduit que $P' = \pi(P)$ et ensuite que $P \in \pi^{-1}(V_M(a'))$. Ensuite $\pi(\operatorname{Min} A)$ est dense dans $\operatorname{Min} A'$: soit $D_M(b')$ un ouvert non vide de $\operatorname{Min} A'$, et supposons que $\pi(\operatorname{Min} A) \cap D_M(b')$ soit vide; alors $\pi(\operatorname{Min} A) \subset V(b')$ entraine $\operatorname{Min} A \subset {}^t f(V(b'))$; puisque ${}^t f$ est fermée, par densité du spectre minimal, on obtient ${}^t f(V(b')) = \operatorname{Spec}(A)$; puisque ${}^t f$ est surjective et minimale, on en déduit que $V(b') = \operatorname{Spec}(A')$, une contradiction.

Remarque. On peut appliquer la proposition 22 avec $A'' = \operatorname{Tot} A'$, dans le cas où $A \to \operatorname{Tot} A'$ est un épimorphisme. C'est le cas pour $A' = B_f(A)$.

Posons ici une question: $B_f(A)$ est-il le plus petit sous-anneau de $Q(A)$, contenant A, et ayant un spectre minimal compact?

Nous dirons qu'un morphisme d'anneaux $h: A \to A'$ est faiblement de Baer si pour tout couple (I, J) d'idéaux de type fini de A on a: $I^0 = J^0$ entraine $h(I)^0 = h(J)^0$. La proposition suivante se démontre sans peine, les preuves, pour la plus grande part, étant analogues à celles de la proposition 7.

Proposition 23. *Soit $h: A \to A'$ un morphisme d'anneaux.*

1) *Si A et A' sont réduits, les assertions suivantes sont équivalentes:*
   a) *Le morphisme h est faiblement de Baer.*
   b) *Pour tout couple (I, J) d'idéaux de type fini de A, la relation $I^0 \subset J^0$ entraine $h(I)^0 \subset h(J)^0$.*
   c) *Pour tout idéal de type fini I de A on a: $(h(I^{00}))^0 = h(I)^0$.*
2) *Si h est plat, il est faiblement de Baer.*
3) *Soit un diagramme commutatif d'anneaux réduits*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & A' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ B & \xrightarrow{h'} & B' \end{array}$$

si g et g' sont des morphismes essentiels et si h' est faiblement de Baer, alors h est faiblement de Baer.

On n'a pas ici l'intention de redémontrer que B_f est fonctoriel pour la classe des morphismes de Baer faible. On peut faire cependant quelques remarques.

1) Soit $A \to A'$ un morphisme de Baer entre anneaux réduits, en utilisant $B_f(A) = A[E(A)]$, on a immédiatement un morphisme $B_f(A) \to B_f(A')$.

2) Soit $h: A \to A'$ un morphisme minimalisant entre anneaux réduits. On peut considérer le site $\mathscr{M}$ des idéaux I de A tels que $\operatorname{Min} A \subset D(I)$. Puisque h est

minimalisant, il est clair que $h(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}'$. On en déduit un diagramme commutatif d'anneaux:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{\mathcal{M}} & \rightarrow & A'_{\mathcal{M}'} \end{array}$$

Puisque $A_{\mathcal{M}}$ peut être considéré comme un sous-anneau de $A_{\mathcal{D}} = Q(A)$, les morphismes verticaux du diagramme sont donc essentiels. Soit maintenant un élément a de A et a^* son quasi-inverse dans $Q(A)$; on peut voir que a^* est représenté par l'application linéaire ω: $aa^{00} + a^0 \rightarrow A$ telle que $\omega(ax+y) = x$, avec des notations claires. On controle alors que $\operatorname{Min} A$ est contenu dans $D(aa^{00} + a^0)$: en effet un idéal premier minimal ne peut contenir à la fois un élément et son annulateur et de plus $a \in a^{00}$. On en déduit que $P(A)$ est contenu dans $A_{\mathcal{M}}$, à l'aide du corollaire 2 de la proposition 8. Il existe donc un diagramme commutatif d'anneaux:

$$\begin{array}{ccccc} A & \rightarrow & B_f(A) & \rightarrow & P(A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \rightarrow & B_f(A') & \rightarrow & P(A') \, . \end{array}$$

Puisque $P(A)$ est un anneau plat, le morphisme $P(A) \rightarrow P(A')$, étant plat, est de Baer faible. La proposition 21-3) montre encore que $B_f(A) \rightarrow B_f(A')$ et $A \rightarrow A'$ sont des morphismes faiblement de Baer. On a donc montré une partie de la proposition:

PROPOSITION 24. *Soit f: $A \rightarrow A'$ un morphisme entre anneaux réduits.*

1) *Si f est minimalisant, il est faiblement de Baer.*

2) *Si f est faiblement de Baer et* Min A *compact, alors f est minimalisant.*

PREUVE. Il reste à montrer 2). D'après [29], puisque f est faiblement de Baer, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_f(A) & \rightarrow & B_f(A') \, , \end{array}$$

où $B_f(A) \rightarrow B_f(A')$ est un morphisme faiblement de Baer.

On peut vérifier qu'un morphisme faiblement de Baer induit un morphisme entre les anneaux totaux de fractions. On obtient ainsi un diagramme commutatif d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(A) & \rightarrow & P(A'), \end{array}$$

dans lequel $P(A)=M(A)$, puisque $\operatorname{Min} A$ est compact. De la platitude de $A \rightarrow P(A)$, on déduit que $A \rightarrow A'$ est minimalisant.

REMARQUES.

1) La proposition 24 exprime de façon assez précise l'analogie existant entre les morphismes générisants et les morphismes plats; ces derniers peuvent être caractérisés par: soit f: $A \rightarrow A'$ un morphisme d'anneaux, alors f est plat si et seulement si pour tout idéal I de A et tout idéal J de type fini de A on a $(I:J)A' = IA':JA'$.

2) Cette proposition montre que P est fonctoriel pour une classe de morphismes plus vaste que celle du corollaire 2 de la proposition 8.

3) On a un exemple de morphisme de Baer faible avec l'application canonique

$$\varphi \colon A \rightarrow \prod_{P \in X} A/P ,$$

où A est un anneau réduit et X une partie de $\operatorname{Min} A$. Soient en effet I et J des idéaux de type fini de A tels que $I^0 = J^0$. Puisque I est de type fini, on a $V(I) \cap \operatorname{Min} A = D(I^0) \cap \operatorname{Min} A$. Il en résulte que $V(I) \cap \operatorname{Min} A$ est égal à $V(J) \cap \operatorname{Min} A$, d'où l'on déduit que φ est faiblement de Baer.

Voici une propriété de transfert.

PROPOSITION 25. *Soit f: $A \rightarrow A'$ un morphisme d'anneaux réduits. Si f est générisant et ${}^t f$ surjective (par exemple f fidèlement plate) et A' est un anneau de Baer faible, alors A est un anneau de Baer faible.*

PREUVE. Pour toute partie proconstructible F de $\operatorname{Spec}(A)$ on a ${}^t f^{-1}(\bar{F}) = \overline{{}^t f^{-1}(F)}$, d'après [7, page 339]. Soit $D(a)$ un ouvert de la base de $\operatorname{Spec}(A)$, on a donc: ${}^t f^{-1}(\overline{D(a)}) = \overline{{}^t f^{-1}(D(a))}$, on en déduit que ${}^t f^{-1}(\overline{D(a)})$ est un ouvert et, puisque ${}^t f$ est submersive, $\overline{D(a)}$ est un ouvert.

On dit, suivant [28], qu'un morphisme d'anneaux f: $A \rightarrow A'$ est compatible si $a^0 = b^0$ entraine $f(a)^0 = f(b)^0$, pour tout couple (a, b) d'éléments de A. Les deux questions qui suivent sont motivées par des résultats de [28], dont la formulation nous semble incorrecte: Un morphisme compatible est-il de Baer faible? B_f est-il fonctoriel pour les morphismes compatibles entre anneaux réduits, le morphisme transformé par B_f étant encore compatible? Soit φ: A

$\to A'$ un morphisme compatible entre anneaux réduits et supposons qu'il existe un diagramme commutatif d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_f(A) & \to & B_f(A')\,. \end{array}$$

où $B_f(\varphi)$ est compatible. Ce dernier morphisme induit un morphisme $P(A) \to P(A')$. Puisque $P(A)$ est un anneau plat, la proposition 23-3) montre que φ est de Baer faible. Il suffit donc de trouver un morphisme compatible entre anneaux réduits, qui ne soit pas de Baer faible, pour avoir une réponse négative aux deux questions. Un tel exemple m'a été fourni par M. Haddad, en voici la construction.

LEMME 3. *Soit A un anneau réduit, ayant un idéal premier M tel que:*

a) *M est l'ensemble des diviseurs de 0 de A (i.e. $M = \bigcup_{P \in \operatorname{Min} A} P$).*

b) *Il existe un sous-ensemble fini $\{s_1, \ldots, s_n\}$ de M tel que $(s_1, \ldots, s_n)^0 = 0$. Soit I l'idéal de $A[X]$, constitué des polynomes $f(X) \in M[X]$, tels que $f(0) = 0$, alors $A \to A[X]/I$ est un morphisme entre anneaux réduits, compatible et injectif, mais qui n'est pas de Baer faible.*

PREUVE. Sans difficulté.

Donnons maintenant un exemple de la situation décrite dans le lemme ci-dessus. On considère l'anneau $\mathbf{Q}[X, Y] = B$ et l'idéal maximal $J = (X, Y)$. Soit un système de représentants des éléments extrémaux de B, contenus dans J, auquel on adjoint tous les multiples à coefficients dans $\mathbf{Q}^*$ des éléments du système et on désigne par $\mathscr{P}$ l'ensemble obtenu. Soit $\mathscr{P} = \{p_0, \ldots, p_n, \ldots\}$ une énumération de $\mathscr{P}$; Soit, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'anneau intègre $B_n = B/(p_n)$, on désigne par x_n (resp. y_n) la classe de X (resp. Y) dans B_n et par J_n l'idéal maximal de B_n correspondant à J. Dans l'anneau réduit $C = \prod_{n \in \mathbf{N}} B_n$, on distingue les éléments $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et on désigne par I l'idéal engendré par les éléments $x\delta_n$ et $y\delta_n$ pour $n \in \mathbf{N}$, où δ_n est la suite nulle, sauf pour la composante d'ordre n qui est 1. On pose alors $A = \mathbf{Q}[x, y, I]$; Les éléments a de A ont une représentation de la forme $a = r + f(x, y) + i$, où $r \in \mathbf{Q}$, $f(x, y) \in J$ et $i \in I$, de manière unique. On définit M par l'ensemble des $a \in A$ tels que $r = 0$, c'est un idéal maximal de A. On controle alors que le couple (A, M) et les éléments x, y vérifient les hypothèses du lemme.

Une retouche à la dernière construction permet de trouver un exemple direct de morphisme injectif entre anneaux réduits, qui soit compatible mais non de Baer faible. Dans l'anneau C précédent, on distingue cette fois les éléments $x' = x - \delta_0 x$ et $y' = y - \delta_0 y$ et on désigne par I' l'idéal engendré par les éléments

$x\delta_n$ et $y\delta_n$, pour $n \in \mathbf{N}-\{0\}$. Soit alors $A'=\mathbf{Q}[x',y',I']$ et soit B' le sous-anneau de C engendré par A', $x\delta_0$, $y\delta_0$; On peut voir que $A' \subset B'$ est injective compatible mais n'est pas de Baer faible.

REMARQUES

1) Un autre exemple d'anneau satisfaisant aux conditions du lemme 3 peut être trouvé s'il existe un anneau réduit A, à spectre minimal compact, ayant un idéal premier M tel que $M=\bigcup_{P \in \operatorname{Min} A} P$ et M ne soit pas minimal: en effet, il existe $s_P \in M-P$, pour tout $P \in \operatorname{Min} A$; de $\operatorname{Min} A \subset \bigcup D(s_P)$, on déduit par compacité $\operatorname{Min} A \subset D(s_1,\ldots,s_n)$; puisque A est réduit, on obtient $(s_1,\ldots,s_n)^0 =0$, où $s_1,\ldots,s_n$ sont des éléments de M. En fait l'auteur ne sait pas s'il existe de tels anneaux, la condition de réduction semblant être la cause des difficultés.

2) Un morphisme compatible entre anneaux réduits et injectif n'est pas forcément minimalisant. Considérons un anneau local réduit d'idéal maximal M tel que M soit égal à la réunion des idéaux premiers minimaux et tel que $\operatorname{Spec}(A)=\operatorname{Min} A \cup \{M\}$. Il en existe, il suffit de localiser en un idéal maximal l'anneau introduit dans la proposition 7-2 de [16] et de le réduire.

Dans un tel anneau A, si a et b sont des éléments de A, $\overline{D(a)}=\overline{D(b)}$ entraine $D(a)=D(b)$ (cette propriété est équivalente à $0:a=0:b$ entraine $\sqrt{(a)}=\sqrt{(b)}$). Considérons alors le morphisme canonique $t: A \to T(A)$ de A dans son anneau plat universel, il est injectif. Il est aussi compatible: en effet $0:a=0:b$ entraine $D(a)=D(b)$, d'où l'on déduit $\overline{D(t(a))}=\overline{D(t(b))}$ et enfin $0:t(a)=0:t(b)$. Le morphisme t ne peut être minimalisant, puisque A n'est visiblement pas plat. A nouveau, si on peut trouver un anneau A vérifiant les conditions de cette remarque et tel que $\operatorname{Min} A$ soit compact, on obtient un exemple de morphisme injectif compatible entre anneaux réduits et qui n'est pas de Baer faible: il suffit d'utiliser la proposition 24-2).

QUELQUES QUESTIONS OUVERTES.

1) Pour quels anneaux A a-t-on $B_f(A)=B(A)$? Cette question fut posée par P. Samuel, après lecture du manuscrit.

2) Si A est un anneau réduit, A est de Baer équivaut-il à $T(A)$ est un anneau de Baer? (ou, ce qui revient au même: $\operatorname{Spec}(A)$ est un espace extrémal équivaut-il à la topologie constructible fait de $\operatorname{Spec}(A)$ un espace Stonien?)

Appendice 1. Anneaux totalement intégralement clos.

La notion d'anneau totalement intégralement clos (abrégé en anneau T.I.C.) est introduite dans [5] et étudiée dans [11]: un anneau A est T.I.C. si pour tout morphisme entier injectif $B \to C$ et tout morphisme d'anneaux $B \to A$, il existe un diagramme commutatif d'anneaux

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d] & C . \arrow[dl] \\ A & \end{tikzcd}$$

D'après les articles cités, tout anneau réduit se plonge par un morphisme entier essentiel dans un anneau T.I.C. $\Omega(A)$; le morphisme $A \to \Omega(A)$ est la clôture intégrale totale de A. Un résultat de [11] peut se lire ainsi: un anneau A est T.I.C. si et seulement si A est un anneau de Baer et la condition $(^{*}_{*})$ est satisfaite:

$(^{*}_{*})$ Pour tout $P \in \operatorname{Spec}(A)$, l'anneau A/P est intégralement clos, de corps des quotients algébriquement clos.

Nous dirons qu'un anneau A a la propriété F.L. si tout polynôme unitaire, à une indéterminée sur A, se factorise en facteurs linéaires unitaires.

On peut alors voir qu'un anneau A est T.I.C. si et seulement si A est de Baer et possède la propriété F.L.

D'autre part dans [1], on construit pour tout anneau A (non forcément réduit) un anneau que nous désignerons par $\operatorname{Bes}(A)$ et un morphisme d'anneaux $A \to \operatorname{Bes}(A)$ fidèlement plat et entier, où de plus $\operatorname{Bes}(A)$ a la propriété F.L. On peut se demander quels sont les liens entre les deux constructions. Voici quelques observations, certainement insuffisantes pour l'étude de ce problème.

1) L'anneau $\operatorname{Bes}(A)$ n'est pas en général T.I.C.: en effet la fidèle platitude de $A \to \operatorname{Bes}(A)$ entrainerait, dans le cas contraire, la compacité de $\operatorname{Min} A$.

2) Soit A un anneau de Baer, on peut trouver un idéal I de $\operatorname{Bes}(A)$ tel que $A \to \operatorname{Bes}(A) \to \operatorname{Bes}(A)/I$ soit entière et essentielle. La proposition 18 montre alors que $\operatorname{Bes}(A)/I$ est un anneau de Baer. La condition F.L. se transmettant aux quotients, on voit que $\operatorname{Bes}(A)/I$ est un anneau T.I.C.

On en déduit que $A \to \Omega(A)$ s'identifie à $A \to \operatorname{Bes}(A)/I$. Si A n'est pas un anneau de Baer, mais est réduit, on peut remplacer A dans ce qui précède par $B(A)$: en effet $A \to B(A)$ est entière essentielle.

3) Si A est un anneau réduit, ayant la condition F.L., l'anneau $B(A)$ est un anneau T.I.C.: on a vu que pour tout $Q \in \operatorname{Spec}(B(A))$, les anneaux $A/(Q \cap A)$ et $B(A)/Q$ sont isomorphes (proposition 9), il suffit alors d'utiliser la condition $(^{*}_{*})$, celle-ci étant équivalente à: pour tout $P \in \operatorname{Spec}(A)$ l'anneau A/P possède la condition F.L.

4) Soit A un anneau réduit ayant la condition F.L.; Pour tout $P \in \operatorname{Spec}(A)$, tout localisé de A/P en un idéal premier de A/P est un anneau Hensélien: A/P est intégralement clos et a la condition F.L., on a donc plus de conditions qu'il n'en faut pour appliquer la proposition 43-2 de Local Rings de M. Nagata. On

en déduit, en particulier, que toute extension entière et intègre de A/P n'a qu'un idéal premier au dessus de 0.

5) Ce qui empèche tout espoir d'avoir $\Omega(A) = \mathrm{Bes}\,(A)$ pour un anneau réduit est du au fait que Bes (A) n'est pas réduit, même si A l'est: Bes (A) est construit en produisant des racines "canoniques" pour les polynomes unitaires de $A[X]$. On n'a su ici résoudre la question: $\Omega(A)$ est-il égal à Bes $(A)_{\mathrm{red}}$ si A est réduit?.

6) Si A est un anneau ayant la condition F.L., pour tout couple (I, J) d'idéaux de A on a la relation $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I}.\sqrt{J}$: il suffit de considérer l'équation $X^2 - a = 0$ où $a \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$; en particulier, si P et Q sont des idéaux premiers de A, on a $P \cap Q = P.Q$.

Ces propriétés semblent indiquer une analogie avec les anneaux plats: dans un tel anneau tout idéal est pur et donc pour tout couple (I, J) d'idéaux de A on a $I \cap J = I.J$. Cependant pour A anneau réduit, $\Omega(A)$, qui a la condition F.L., n'est pas plat en général, sauf si A l'est lui même.

Appendice 2. Un morphisme minimalisant.

On se propose de montrer ici que toute localisation par rapport à un site $\mathcal{F}$ de type fini (i.e. tel que $\mathcal{F}$ contienne un sous ensemble cofinal d'idéaux de type fini) n'est pas trop "monstrueuse" et, comme corollaire, que le morphisme de la localisation est minimalisant.

Rappelons, d'après [20] par exemple, qu'étant donné un anneau A, le contenu d'un polynôme f de $A[X]$ est l'idéal engendré dans A par les coefficients de f: on le note $c(f)$. La formule des contenus est alors:
$c(f)^{m+1}c(g) = c(fg)c(f)^m$ où f et g sont des éléments de $A[X]$ et $d^\circ g = m$.

Lemme. *Il existe une application injective de l'ensemble des sites de type fini, non triviaux, d'un anneau A dans l'ensemble des parties multiplicatives saturées de $A[X]$, contenant 1 et ne contenant pas 0.*

Preuve. Soit $\mathcal{F}$ un site de type fini, non trivial, et désignons par $\mathcal{G}$ le sous ensemble cofinal des idéaux de type fini de $\mathcal{F}$. Soit $s(\mathcal{F})$ la partie de $A[X]$ constituée des polynômes f tels que $c(f) \in \mathcal{G}$. Alors $s(\mathcal{F})$ est une partie multiplicative saturée de $A[X]$, telle que $1 \in s(\mathcal{F})$ et $0 \notin s(\mathcal{F})$. En effet, soient f et g des éléments de $s(\mathcal{F})$, la formule des contenus entraine $c(fg) \in \mathcal{G}$. Soient f et g des polynômes tels que $fg \in s(\mathcal{F})$, de $c(fg) \subset c(f)c(g)$ on déduit que f et g sont dans $s(\mathcal{F})$.

Si S est une partie multiplicative de $A[X]$, telle que $0 \notin S$ et $1 \in S$, on controle que $c(S)$, ensemble des idéaux de A contenant le contenu d'un élément de S, est un site de type fini. On peut voir de plus que $c \circ s$ est l'application identique.

Soit $\varphi: A \to A[X]$ le morphisme canonique et soit $\mathscr{F}_S$ le site de $A[X]$ associé canoniquement à la partie multiplicative $S = s(\mathscr{F})$. Il est facile de voir que $\varphi(\mathscr{F}) \subset \mathscr{F}_S$, on en déduit l'existence d'un diagramme commutatif d'anneaux:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_{\mathscr{F}} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\bar\varphi} \\ A[X] & \rightarrow & A[X]_S \end{array}$$

Quelques calculs montrent que $\bar{\varphi}(\hat{u})$ peut être défini ainsi pour $\hat{u} \in A_{\mathscr{F}}$: soit $u: I \to A/\mathscr{F}A$ un représentant de $\hat{u}$, où $I \in \mathscr{G}$, soit: $I = (a_0, \ldots, a_n)$; alors

$$\bar{\varphi}(\hat{u}) = \frac{\sum_{k=0}^{n} [u(a_k)] X^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k X^k},$$

où $[u(a_k)]$ désigne un représentant de $u(a_k)$ dans l'anneau $A/\mathscr{F}A$. On en déduit que $\bar{\varphi}$ est injective: si $\bar{\varphi}(\hat{u}) = 0$, il existe un idéal $J = (b_0, \ldots, b_p) \in \mathscr{G}$ tel que

$$(b_0 + \ldots + b_p X^p)\left(\sum_{k=0}^{n} [u(a_k)] X^k\right) = 0 .$$

La formule des contenus donne $J^{n+1} c(\sum_{k=0}^{n} [u(a_k)] X^k) = 0$. On en déduit que pour $k = 0, \ldots, n$ l'annulateur de $[u(a_k)]$ est dans $\mathscr{F}$: en effet J^{n+1} est dans $\mathscr{F}$. Ainsi u est nulle sur I, d'où $\hat{u} = 0$.

PROPOSITION. *Soit $\mathscr{F}$ un site de type fini sur un anneau commutatif A, il existe une partie multiplicative S de $A[X]$ telle que l'on ait un diagramme commutatif d'anneaux*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_{\mathscr{F}} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\bar\varphi} \\ A[X] & \rightarrow & A[X]_S \end{array}$$

où l'application $\bar{\varphi}$ est injective.

En particulier, l'homomorphisme $A \to A_{\mathscr{F}}$ est minimalisant.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Besserre, *Thèse de la Faculté des Sciences de Clermont-Fd*, Gauthier-Villars, Paris, Série E N° 67, 1968.
2. W. Borho, *Extensions essentielles d'anneaux commutatifs par des éléments idempotents*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A 277 (1973), 973–976.

3. N. Bourbaki, *Algèbre commutative, Topologie Générale*, Hermann, Paris.
4. M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes Algèbriques, Tome* 1, Masson, Paris, 1970.
5. E. Enochs, *Totally integrally closed rings*, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968), 701–706.
6. A. Gleason, *Projective topological spaces*, Illinois J. Math. 2 (1958), 482–489.
7. A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algèbrique* I (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 166), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1971.
8. L. Haddad, *Sur quelques points de topologie générale. Théorie des nasses et tramails*, Ann. Sci. Univ. Clermont Math. 44-7 (1970), 5–80.
9. M. Henriksen and M. Jerison, *The space of minimal primes of a commutative ring*, Trans. Amer. Math. Soc. 115 (1965), 110–130.
10. M. Höchster, *Prime ideal structure in commutative rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 142 (1969), 43–60.
11. M. Höchster, *Totally integrally closed rings and extremal spaces*, Pacific J. Math. 32 (1970), 767–779.
12. K. Keimel, *Baer extensions of rings and Stone extensions of semi groups*, Semigroup Forum 2 (1971), 55–63.
13. J. Kist, *Two characterizations of commutative Baer rings*, Pacific J. Math. 50 (1974), 125–134.
14. J. Kist, *Minimal prime ideals in commutative semi groups*, Proc. London Math. Soc. 3–13 (1963), 31–50.
15. J. Lambek, *Lectures on Rings and Modules*, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts - Toronto - London, 1966.
16. D. Lazard, *Disconnexités des spectres d'anneaux et de préschémas*, Bull. Soc. Math. France 95 (1967), 95–108.
17. D. Lazard, *Epimorphismes plats*, Seminaire P. Samuel (1967, 1968), Secrétariat Mathématique, Paris.
18. A. C. Mewborn, *Some conditions on commutative semi prime rings*, J. Algebra 13 (1969), 422–431.
19. A. C. Mewborn, *Regular rings and Baer Rings*, Math. Z. 121 (1971), 211–219.
20. J. Ohm and D. E. Rush, *Content modules and algebras*, Math. Scand. 31 (1972), 49–68.
21. J. P. Olivier, *Anneaux absolument plats universels et épimorphismes à buts réduits*, Séminaire P. Samuel (1967, 1968), Secrétariat Mathématique, Paris.
22. J. P. Olivier, *Morphismes immergeants de Ann*, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Publ. N° 106, Montpellier, 1971.
23. G. Picavet, *Autour des idéaux premiers de Goldman d'un anneau commutatif*, Ann. Sci. Univ. Clermont Math. 57-11 (1975), 73–90.
24. Y. Quentel, *Sur la compacité du spectre minimal d'un anneau*, Bull. Soc. Math. France 99 (1971), 265–272.
25. Y. Quentel, *Erratum*, Bull. Soc. Math. France 100 (1972), 461.
26. R. M. Raphael, *Algebraic extensions of commutative regular rings*, Canad. J. Math. XXII-6 (1970), 1133, 1155.
27. T. P. Speed and M. W. Evans, *A note on commutative Baer rings*, J. Austral, Math. Soc. 13 (1971), 1–6.
28. T. P. Speed, *A note on commutative Baer rings* II, J. Austral. Math. Soc. 14 (1972), 257–263.
29. T. P. Speed, *A note on commutative Baer rings* III, J. Austral. Math. Soc. 15 (1973), 15–21.
30. H. Storrer, *Epimorphismen von Kommutativen Ringen*, Comment. Math. Helv. 43 (1968), 378–401.
31. P. Vamos, *On the minimal primes of a tensor product of two fields*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 84 (1978), 25–35.

32. W. V. Vasconcelos, *Finiteness in projective ideals*, Notas e communiçaçoes de Matemàtica 34, Instituto de Matemàtica Universidade Federal de Pernanbuco, 1971.

33. A. Wilansky, *Topology for Analysis*, Ginn and Company, Xerox College Publishing, Lexington, Massachusetts - Toronto, 1970.

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE PURE
UNIVERSITÉ DE CLERMONT II
B.P. 45 - 63170 AUBIERE
FRANCE