

COURBES GENERALES DE P^3

PATRICK LE BARZ

Table des Matières.

- I) Sous-variétés générales (codimension 2) de $P^n(C)$ 245
 - A) Rappels sur la théorie de Mather locale 245
 - B) Cas des morphismes finis 248
 - C) Définition des sous-variétés générales 250
- II) Le cas des courbes dans $P^3(C)$ 255
 - A) Notations et lemmes utiles par la suite 255
 - B) Caractérisation des courbes générales 257
- III) Exemples de courbes générales 265
 - A) Le cas particulier des courbes planes ou situées sur une quadrique 265
 - B) Le cas des intersections complètes 266
 - C) Le cas des courbes rationnelles 275

Introduction.

Soit C une courbe non singulière de P^3 , de degré n et genre g . Des formules classiques de Cayley (voir par exemple Semple-Roth [9] page 376) expriment en fonction de n et g le nombre t de trisécantes à C rencontrant une droite fixe, le nombre k de tangentes recoupant C et le nombre q de quadrisécantes à C . Ce sont :

$$t = (n-2) \left(\frac{(n-1)(n-3)}{3} - g \right)$$

$$k = 2((n-2)(n-3) + g(n-6))$$

$$q = \frac{1}{12}(n-2)(n-3)^2(n-4) - \frac{1}{2}g(n^2 - 7n + 13 - g).$$

Comme le remarque déjà Cayley, ces formules ne sont pas toujours applicables. Il faut pour cela que la courbe C soit choisie « générale ». Par exemple l'intersection complète d'une quadrique et d'une surface de degré 4 donne une courbe pour laquelle $n=8$ et $g=9$. La troisième formule donne alors $q = -4$.

Reçu le 1. juin, 1978.

Il ne semble pas jusqu'ici que la notion de courbe « générale » ait été bien définie. Le but de ce travail est d'enlever les guillemets, définir des courbes générales de P^3 , énoncer leurs propriétés et prouver pour celles-ci les formules en question.

Pour cela on définit — cela ne coûte pas plus cher — les sous-variétés non singulières de codimension 2 générales de P^n . Cela se fera en demandant que la restriction à une telle sous-variété de la projection canonique

$$(\text{Drapeaux point-droite}) \rightarrow (\text{Grassmannienne})$$

soit stable au sens de Mather. (Ce qu'on pourra dire encore: la forme associée de Chow ou bien le complexe de droites rencontrant C n'a que des singularités génériques). Avec cette définition, il devient aisé de voir que parmi les sous-variétés de codimension 2 de P^n , celles qui sont générales forment un ouvert de Zariski.

On revient par la suite au cas $n=3$ et on donne une caractérisation complète des courbes générales de P^3 par le

THÉORÈME. *Pour qu'une courbe non singulière C de P^3 soit générale, il faut et il suffit:*

- a) *pour toute trisécante à C , les tangentes aux points d'intersection ne sont pas dans un même plan,*
- b) *pour toute quadrisécante à C , si les quatre tangentes aux points d'intersection sont disjointes deux à deux, alors aucune d'elles n'est tangente à la quadrique définie par les trois autres,*
- c) *pour toute tangente recoupant C en m , le plan osculateur au point de contact est transverse à la tangente en m ,*
- d) *il n'y a ni quintisécante, ni bitangente, ni tangente stationnaire, ni tangente recoupant C deux fois.*

Cette caractérisation permet alors de montrer que « presque toutes » les intersections complètes et les courbes rationnelles deviennent générales lorsqu'on les « déforme ».

Dans [4], on montrera les formules de Cayley précitées ainsi qu'une formule pour les bitangentes d'une surface de P^4 .

Je remercie vivement le professeur A. Van de Ven pour m'avoir suggéré ce problème et m'avoir permis de travailler à Leiden dans des conditions particulièrement favorables.

I. Sous-variétés générales (codimension 2) de $P^n(C)$.

A) *Rappels sur la théorie de Mather locale.*

On rappelle ici les résultats de [6] qui nous serviront. Nous suivons plus ou moins fidèlement ses notations. En particulier on dira germe « stable » au lieu de « infinitésimalement stable » (voir [5, remarque 3]).

Soit $\Phi: N \rightarrow P$ un morphisme entre variétés analytiques complexes et pour $y \in P$, soit S une partie finie de $\Phi^{-1}(y)$. On définit alors le germe de Φ en S :

$$f = \Phi_S: (N, S) \rightarrow (P, y)$$

qu'on peut considérer comme l'ensemble des germes

$$(f_i = \Phi_{x_i}) \quad i = 1 \dots k \quad \text{si } S = \{x_1, \dots, x_k\}.$$

Si N est une variété et $x \in N$, on désigne par $T_x N$ l'espace des vecteurs tangents en x à N et par $\mathcal{T}_x N$ l'espace des germes en x des champs de vecteurs tangents.

Si $\Phi: N \rightarrow P$ est un morphisme et $\Phi(x) = y$, on désigne par $\Phi_x^*(\mathcal{T}_y P)$ l'espace des germes d'applications ζ qui rendent commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & TP \\ & \nearrow \zeta & \downarrow \\ N & & P \\ & \searrow \Phi & \end{array}$$

On définit alors des applications linéaires

$$\omega f_i: \mathcal{T}_y P \rightarrow f_i^*(\mathcal{T}_y P)$$

$$\eta \mapsto \eta \circ f_i$$

et

$$t f_i: \mathcal{T}_{x_i} N \rightarrow f_i^*(\mathcal{T}_y P)$$

$$\xi_i \mapsto T_{x_i} \Phi \circ \xi_i$$

DÉFINITION 1 (Mather). On dit que le germe $f = \Phi_S$ est *stable* si l'application suivante est surjective:

$$\left(\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{T}_{x_i} N \right) \oplus \mathcal{T}_y P \rightarrow \bigoplus_{i=1}^k f_i^*(\mathcal{T}_y P)$$

$$((\xi_i)_i, \eta) \mapsto (t f_i(\xi_i) + \omega f_i(\eta))_i.$$

REMARQUE 2. Il est alors visible pour Φ_S stable et $S' \subset S$ que $\Phi_{S'}$ est stable. En particulier, pour tout $x_i \in S$, le germe $f_i = \Phi_{x_i}$ est stable.

DÉFINITION 3. Soit $f_i = \Phi_{x_i}: (N, x_i) \rightarrow (P, y)$ et soit $ev_y: \mathcal{T}_y P \rightarrow T_y P$

l'application d'évaluation. On note τf_i ou $\tau_{x_i}\Phi$ le sous-espace vectoriel de T_yP ainsi défini:

$$\tau f_i = \text{ev}_y [(\omega f_i)^{-1}(f_i^*(m_y \mathcal{T}_y Y) + t f_i(\mathcal{T}_{x_i} N))]$$

où m_y désigne l'idéal de y dans Y .

LEMME 4. i) Si Φ_{x_i} est une immersion, $\tau_{x_i}\Phi = (T_{x_i}\Phi)(T_{x_i}N)$;

ii) Si $\Phi_0: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$, est donné par

$$(u, v, w) \mapsto (a = uw, b = u, c = w^2, d = v),$$

alors $\tau_0\Phi$ est donné par $a = b = c = 0$ dans $T_0\mathbb{C}^4$.

PREUVE. On regarde seulement le cas ii); soit

$$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \in \Phi_0^* \mathcal{T}_0 \mathbb{C}^4.$$

Alors ζ appartient à $(\omega\Phi_0)^{-1}(\Phi_0^*(m_0 \mathcal{T}_0 \mathbb{C}^4 + t\Phi_0(\mathcal{T}_0 \mathbb{C}^3)))$ si et seulement si

$$\begin{bmatrix} \zeta_1(uw, u, w^2, v) \\ \zeta_2(uw, u, w^2, v) \\ \zeta_3(uw, u, w^2, v) \\ \zeta_4(uw, u, w^2, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w & 0 & u \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2w \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(u, v, w) \\ \xi_2(u, v, w) \\ \xi_3(u, v, w) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{plus des fonctions,} \\ \text{sans terme constant,} \\ \text{de } uw, u, w^2, v. \end{array}$$

En regardant ζ_1 , on s'aperçoit que ξ_1 est nécessairement nul en 0, puisque $\zeta_1(uw, u, w^2, v)$ ne contient pas de monômes non nuls en w . Il en résulte que $\zeta_2(uw, u, w^2, v)$ s'annule pour $u = v = w = 0$, donc le germe ζ_2 n'a pas de terme constant. D'où l'assertion, puisque ζ_1 et ζ_3 n'ont visiblement pas de terme constant non plus.

DÉFINITION 5. Si $(E_i)_{i=1 \dots k}$ sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie F , on dit que les E_i se coupent régulièrement dans F si l'on a

$$\text{codim}_F \left(\bigcap_{i=1}^k E_i \right) = \sum_{i=1}^k \text{codim}_F (E_i).$$

PROPOSITION 6 (Mather [6]). Si $\Phi: M \rightarrow P$ est un morphisme de variétés analytiques et $S = \{x_1, \dots, x_k\} \subset \Phi^{-1}(y)$, les deux conditions suivantes sont équivalentes:

- i) Φ_S est stable,
- ii) $\forall i = 1 \dots k, \Phi_{x_i}$ est stable et les $\tau_{x_i}\Phi$ se coupent régulièrement dans T_yP .

REMARQUE 7. Si $n = \dim N \leq p = \dim P$ (cas qui nous intéressera par la suite) on a alors clairement $\text{card } S \leq p$.

Enfin, pour caractériser les germes stables (en un point), on utilisera le théorème (5.10) de Mather [6] tel qu'il est énoncé et avec les notations de [10, pp. 210 et 211]:

Soit f un germe d'application en 0 de C^n dans C^p et soit k le rang de l'application linéaire tangente. Ecrivons, après choix de coordonnées

$$\begin{cases} f_j(x) = x_j & 1 \leq j \leq k \\ f_i(x) = u_i(x_{k+1}, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^k x_j v_i^j(x_{k+1}, \dots, x_n) + w_i & k+1 \leq i \leq p \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} u_i, v_i^j \in C\{x_{k+1}, \dots, x_n\}, \\ u_i(0) = \frac{\partial u_i}{\partial x_{k+1}}(0) = \dots = \frac{\partial u_i}{\partial x_n}(0) = v_i^j(0) = 0, \\ w_i \text{ dans l'idéal engendré par les } x_p x_q \text{ où } p \text{ et } q \leq k. \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} u = (u_{k+1}, \dots, u_p) \\ v^j = (v_{k+1}^j, \dots, v_p^j) \quad 1 \leq j \leq k \end{cases}$$

et soit (u) l'idéal engendré dans $C\{x_{k+1}, \dots, x_n\}$ par les u_i . Enfin, si m est l'idéal maximal de $C\{x_{k+1}, \dots, x_n\}$, on pose pour $r \in \mathbf{N}$:

$$Q_r(u) = \frac{C\{x_{k+1}, \dots, x_n\}}{(u) + m^{r+1}}.$$

On a alors, avec les notations précédentes

PROPOSITION 8. *Le germe $f: C^n \rightarrow C^p$ est stable si et seulement si v^1, \dots, v^k et les constantes engendrent sur C le quotient de $Q_p(u)^{p-k}$ par le sous-module engendré sur $C\{x_{k+1}, \dots, x_n\}$ par $\partial u / \partial x_{k+1}, \dots, \partial u / \partial x_n$.*

Supposons en plus $p \geq n$ et $k = n - 1$. On a:

PROPOSITION 9. *Si $Q_{p+1}(u) \cong C\{x_n\} / (x_n^{h+1})$ avec $1 \leq h \leq p + 1$ (et aussi $h(p - n + 1) \leq n$), il existe deux systèmes de coordonnées tels que f s'écrive:*

$$\begin{cases} f_i(x) = x_i & 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_n(x) = x_n^{h+1} + \sum_{j=1}^{h-1} x_j \cdot x_n^j \\ f_i(x) = \sum_{j=0}^{h-1} x_{j+(i-n)h} \cdot x_n^{j+1} & n + 1 \leq i \leq p. \end{cases}$$

B) *Cas des morphismes finis.*

Dans toute la suite, on suppose $n = \dim N \leq p = \dim P$.

DÉFINITION 10. Le morphisme $\Phi: N \rightarrow P$ est *stable* si et seulement si

- i) Φ est à fibres finies
- ii) $\forall y \in Y$, si $F = \Phi^{-1}(y)$, le germe Φ_F est stable.

REMARQUE 11. Que cette définition soit équivalente, dans ce cas, à la définition habituelle vient de la remarque 7.

Nous allons traduire cette définition en terme de faisceaux. On désigne les faisceaux de champs de vecteurs tangents à N et P par $\mathcal{T}N$ et $\mathcal{T}P$. On a un morphisme naturel de O_N -modules: $T\Phi: \mathcal{T}N \rightarrow \Phi^*\mathcal{T}P$ d'où l'on déduit un morphisme de O_P -modules:

$$t\Phi: \Phi_*\mathcal{T}N \rightarrow \Phi_*\Phi^*\mathcal{T}P.$$

D'autre part, on a un morphisme naturel de O_P -modules

$$\omega\Phi: \mathcal{T}P \rightarrow \Phi_*\Phi^*\mathcal{T}P.$$

PROPOSITION 12. Soit $\Phi: N \rightarrow P$ un morphisme fini (c'est-à-dire propre, à fibres finies). Alors Φ est stable si et seulement si le morphisme de O_P -modules

$$t\Phi + \omega\Phi: \Phi_*\mathcal{T}N \oplus \mathcal{T}P \rightarrow \Phi_*\Phi^*\mathcal{T}P$$

est surjectif.

PREUVE. Soit $y \in P$ et x_1, \dots, x_k les éléments de $\Phi^{-1}(y)$. Soit (V_i) , $i=1 \dots k$ des voisinages disjoints de x_i dans N et soit U un voisinage de y dans P avec $\Phi^{-1}(U) \subset \bigcup_{i=1}^k V_i$. Se donner une section dans $\Gamma(U, \Phi_*\Phi^*\mathcal{T}P)$ c'est se donner k sections de $\Phi^*\mathcal{T}P$ sur U_1, \dots, U_k (où $U_i = \Phi^{-1}(U) \cap V_i$). De même, se donner une section de $\Gamma(U, \Phi_*\mathcal{T}N)$ c'est se donner k sections $\xi_1 \dots \xi_k$ de $\mathcal{T}N$ sur U_1, \dots, U_k . Enfin, le morphisme $\omega\Phi$ est défini sur U par

$$\Gamma(U, \mathcal{T}P) \mapsto \Gamma(U, \Phi_*\Phi^*\mathcal{T}P)$$

$$\eta \mapsto (\eta \circ \Phi|_{U_1}, \dots, \eta \circ \Phi|_{U_k}).$$

Comme $t\Phi + \omega\Phi$ est surjectif si et seulement si il est surjectif pour les sections au-dessus d'ouverts « petits », on retrouve la définition de germe stable donnée plus haut (Définition 1).

DÉFINITION 13. Appelons *famille de morphismes finis* la donnée d'un diagramme commutatif d'applications propres entre espaces analytiques:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\Phi} & P \\ & \searrow p' & \nearrow p \\ & T & \end{array}$$

où l'on suppose Φ morphisme fini et p et p' lisses (c'est-à-dire localement en haut N et P sont des produits de T par une variété non singulière et p' et p sont les projections).

On sait dans ce cas définir les faisceaux localement libres Θ_N et Θ_P des champs de vecteurs verticaux sur N et P . On a comme précédemment un morphisme naturel de O_P -modules

$$t\Phi + \omega\Phi: \Phi_*\Theta_N \oplus \Theta_P \rightarrow \Phi_*\Phi^*\Theta_P.$$

Le morphisme Φ étant fini et \mathcal{F} un O_N -module cohérent, on sait (voir [1]) que $\Phi_*\mathcal{F}$ est un O_P -module cohérent. On en déduit que Coker $(t\Phi + \omega\Phi)$ est un O_P -module cohérent, donc que son support est un sous-espace analytique de P . La projection p étant propre, il résulte d'un théorème de Remmert [7] que $p(\text{Supp Coker}(t\Phi + \omega\Phi))$ est un sous-espace analytique de T . On en déduit la proposition suivante (voir aussi [5]):

PROPOSITION 14. Soit $\Phi: N \rightarrow P$ une famille de morphismes finis au-dessus de T . Le morphisme $\Phi_t: N_t \rightarrow P_t$ est stable si et seulement si t est en dehors du sous-ensemble analytique

$$S(\Phi) = p(\text{Supp Coker}(t\Phi + \omega\Phi)).$$

REMARQUE 15. i) il n'y a aucune raison pour que $S(\Phi) \neq T$!
 ii) si on suppose que tout est algébrique dans ce qui précède, il est clair que $S(\Phi)$ est encore algébrique dans T .

PREUVE DE LA PROPOSITION. Soit $t \notin S(\Phi)$ et $y \in P_t$. Montrons que le germe $\Phi_{F_t}: (N_t, F_t) \rightarrow (P_t, y)$ est stable, en désignant $\Phi^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ par F_t .

Soit ζ_1, \dots, ζ_k des germes en x_1, \dots, x_k de $\Phi_t^*\mathcal{F}_{P_t}$. Ils se prolongent en des germes Z_1, \dots, Z_k de $\Phi^*\Theta_P$: en effet, si U est un voisinage suffisamment petit de t et W un voisinage suffisamment petit de y dans P_t , il existe des voisinages V_1, \dots, V_k de x_1, \dots, x_k dans N_t tels que la restriction de Φ s'écrive:

$$\begin{array}{ccc} U \times V_i & \xrightarrow{\Phi} & U \times W \\ & \searrow & \nearrow \\ & U & \end{array}$$

Le champ ζ_i , qui par définition rend commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} & \zeta_i \nearrow & TW \\ & & \downarrow \\ V_i & \xrightarrow{\Phi_i} & W \end{array}$$

se prolonge alors trivialement en un germe Z_i en x_i de $\Phi^* \Theta_p$.

Par hypothèse, on trouve ainsi X_1, \dots, X_k des germes en x_1, \dots, x_k de Θ_N et Y , un germe en y de Θ_p tels que

$$Z_i = T_v \Phi \circ X_i + Y \circ \Phi \quad (1 \leq i \leq k)$$

où $T_v \Phi$ désigne la différentielle verticale de Φ . En restreignant X_i et Y à N_i et P_i , on obtient des champs ξ_i et η qui vérifient

$$\zeta_i = T\Phi \circ \xi_i + \eta \circ \Phi \quad (1 \leq i \leq k),$$

d'où le résultat annoncé.

C) Définition des sous-variétés générales.

1°) Soit X une sous-variété non singulière de codimension 2 dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Les droites δ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ qui rencontrent X forment une hypersurface de la grassmannienne $G = G(1, n)$ des droites de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. (G est de dimension $2n-2$). On notera H cette hypersurface.

Considérons la variété F ainsi définie:

$$(\delta, m) \in F \subset G \times \mathbf{P}^n \Leftrightarrow \delta \ni m.$$

Visiblement, F munie de la première projection $F \rightarrow G$ est une fibration de fibre \mathbf{P}^1 ; munie de la seconde projection $F \rightarrow \mathbf{P}^n$, c'est une fibration de fibre \mathbf{P}^{n-1} . (On peut également dire que $F = \text{Proj } TP^n$, le fibré projectif associé au fibré vectoriel tangent). L'image réciproque A de X par cette seconde projection,

$$A = \{(\delta, m) \mid m \in \delta \cap X\}$$

est donc une sous-variété algébrique non singulière de dimension $2n-3$ de F . On a un morphisme naturel

$$\pi: A \rightarrow G$$

dont l'image est l'hypersurface H . Le problème que nous envisageons est de décrire les singularités de π et H lorsque X est choisi « de manière générale ». C'est ce qu'on va préciser par la

DÉFINITION 16. $X \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ est générale si le morphisme $\pi: A \rightarrow G$ est stable.

REMARQUE 17. D'après la remarque 7, la fibre de π contient alors au plus $2n-2$ points. En particulier, X ne contient pas de droites.

2°) Si X est générale, la description de π est particulièrement simple: pour la préciser, introduisons la notion d'ordre de contact d'une courbe et d'une sous-variété de codimension 2:

DÉFINITION 18. A l'origine de C^p , soit L un germe de courbe lisse et X un germe de sous-variété lisse de codimension 2. On appelle *ordre de contact de X avec L en 0* le nombre (éventuellement infini)

$$\text{Contact}_0(X, L) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_p\}}{I(L) + I(X)}$$

où $I(L)$ et $I(X)$ désignent les idéaux de L et X .

On a alors le lemme:

LEMME 19.

$$\text{Contact}_0(X, L) = \text{Min}_{H \supset X} m_0(H, L)$$

où $m_0(H, L)$ désigne la multiplicité d'intersection et H parcourt les germes d'hypersurfaces contenant X .

PREUVE. On se ramène à $I(L) = (x_1, \dots, x_{p-1})$ et $I(X) = (\varphi, \Psi)$ avec $\varphi, \Psi \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_p\}$. Si

$$\text{val } \varphi(0, x_p) = k \quad \text{et} \quad \text{val } \Psi(0, x_p) = l,$$

on a clairement $\text{Contact}_0(X, L) = \text{Min}(k, l)$. D'autre part, si $h \in (\varphi, \Psi)$ et $H = h^{-1}(0)$, alors

$$m_0(H, L) = \dim \frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_p\}}{(x_1, \dots, x_{p-1}, h)} = \frac{\mathbb{C}\{x_p\}}{(h(0, x_p))} = \text{val } h(0, x_p).$$

Or $\text{Inf}_{h \in (\varphi, \Psi)} \text{val } h(0, x_p) = \text{Min}(k, l)$. D'où le résultat.

3°) Les notations étant celles du début du paragraphe, soit $\delta \in G$ et $m \in X \cap \delta$. Dans F , on a donc une fibre F_δ qui rencontre A en (m, δ) .

PROPOSITION 20. *Le contact de la fibre F_δ avec A en (m, δ) dans F est égal au contact de X avec δ en m dans $P^n(\mathbb{C})$. De plus,*

a) *si δ est tangente à X en m , l'application $\pi: A \rightarrow G$ est de rang $\dim A - 1 = 2n - 4$ en (n, δ) ;*

b) si δ est transverse à X en m , l'application $\pi: A \rightarrow G$ est une immersion en (m, δ) et le germe d'hypersurface (H, δ) de G est donc nonsingulier. Si en outre X' est une autre sous-variété non singulière de codimension 2 tangente à X en m , alors le germe (H', δ) correspondant est tangent à (H, δ) dans G .

REMARQUE 21. La proposition 20 servira à décrire explicitement les singularités de π en s'appuyant sur la proposition 9. Voir au paragraphe II.

PREUVE. a) Supposons d'abord δ tangente à X en m . Soit $0_{t, x_1, \dots, x_{n-1}}$ un système de coordonnées affines centré en m , l'axe des t correspondant à δ et $T_m X$ au sous-espace d'équations

$$x_{n-2} = x_{n-1} = 0.$$

Soit H_0 l'hyperplan $t=0$ et H_1 l'hyperplan $t=1$. Visiblement, toute droite voisine de δ coupe H_0 (respectivement H_1) suivant un point de coordonnées $(0, \xi_1^0, \dots, \xi_{n-1}^0)$ (respectivement $(1, \xi_1^1, \dots, \xi_{n-1}^1)$) de sorte que les coordonnées $(\xi_1^0, \dots, \xi_{n-1}^0, \xi_1^1, \dots, \xi_{n-1}^1)$ constituent une carte de G au voisinage de δ . Donc, au voisinage de (m, δ) , $\mathbf{P}^n \times G$ admet comme système de coordonnées:

$$(t, x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_1^0, \dots, \xi_{n-1}^0, \xi_1^1, \dots, \xi_{n-1}^1),$$

et la sous-variété F y est définie par les équations:

$$x_i = t\xi_i^1 + (1-t)\xi_i^0 \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Ainsi $(t, \xi_1^0, \dots, \xi_{n-1}^0, \xi_1^1, \dots, \xi_{n-1}^1)$ constitue un système de coordonnées de F au voisinage de (m, δ) .

Soit alors une paramétrisation de X au voisinage de 0:

$$\begin{cases} x_{n-2} = \Psi(t, x_1, \dots, x_{n-3}) \\ x_{n-1} = \theta(t, x_1, \dots, x_{n-3}), \end{cases}$$

où Ψ et θ sont de valuation ≥ 2 . La sous-variété A de F est définie par

$$\begin{cases} t\xi_{n-2}^1 + (1-t)\xi_{n-2}^0 = \Psi(t, t\xi_1^1 + (1-t)\xi_1^0, \dots, t\xi_{n-3}^1 + (1-t)\xi_{n-3}^0) \\ t\xi_{n-1}^1 + (1-t)\xi_{n-1}^0 = \theta(t, t\xi_1^1 + (1-t)\xi_1^0, \dots, t\xi_{n-3}^1 + (1-t)\xi_{n-3}^0) \end{cases}$$

soit encore, puisque t est voisin de 0:

$$\begin{aligned} \xi_{n-2}^0 = F &= \frac{-t\xi_{n-2}^1 + \Psi(t, t\xi_1^1 + (1-t)\xi_1^0, \dots, t\xi_{n-3}^1 + (1-t)\xi_{n-3}^0)}{1-t} \\ \xi_{n-1}^0 = G &= \frac{-t\xi_{n-1}^1 + \theta(t, t\xi_1^1 + (1-t)\xi_1^0, \dots, t\xi_{n-3}^1 + (1-t)\xi_{n-3}^0)}{1-t}. \end{aligned}$$

De sorte que $(t, \xi_1^0, \dots, \xi_{n-3}^0, \xi_1^1, \dots, \xi_{n-1}^1)$ constituent des coordonnées de A au

voisinage de (m, δ) et dans ces coordonnées, le morphisme $\pi: A \rightarrow G$ est donné par

$$(t, \xi_1^0, \dots, \xi_{n-3}^0, \xi_1^1, \dots, \xi_{n-1}^1) \mapsto (\xi_1^0, \dots, \xi_{n-3}^0, G, F, \xi_1^1, \dots, \xi_{n-1}^1)$$

où G et F sont les fonctions qui précèdent. On voit donc que π est de rang $2n-4$, puisque G et F sont de valuation ≥ 2 .

De plus, cherchons le contact de F_δ avec A en (m, δ) . Comme l'idéal de F_δ dans $\mathbf{C}\{t, \xi_1^0, \dots, \xi_{n-1}^0, \xi_1^1, \dots, \xi_{n-1}^1\}$ est $(\xi_1^0, \dots, \xi_{n-1}^0, \xi_1^1, \dots, \xi_{n-1}^1)$ et comme celui de A est engendré par les deux éléments:

$$\begin{cases} t\xi_{n-2}^1 + (1-t)\xi_{n-2}^0 - \Psi(t, t\xi_1^1 + (1-t)\xi_1^0, \dots, t\xi_{n-3}^1 + (1-t)\xi_{n-3}^0) \\ t\xi_{n-1}^1 + (1-t)\xi_{n-1}^0 - \theta(t, t\xi_1^1 + (1-t)\xi_1^0, \dots, t\xi_{n-3}^1 + (1-t)\xi_{n-3}^0) \end{cases}$$

on voit que

$$\text{Contact}_{(m, \delta)}(A, \pi^{-1}(\delta)) = \dim \frac{\mathbf{C}\{t\}}{(\Psi(t, 0), \theta(t, 0))}.$$

D'autre part, l'idéal de δ dans $\mathbf{C}\{t, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ est (x_1, \dots, x_{n-1}) ; celui de X est engendré par les deux éléments

$$\begin{cases} x_{n-2} - \Psi(t, x_1, \dots, x_{n-1}) \\ x_{n-1} - \theta(t, x_1, \dots, x_{n-1}) \end{cases}.$$

Donc

$$\text{Contact}_n(X, \delta) = \dim \frac{\mathbf{C}\{t\}}{(\Psi(t, 0), \theta(t, 0))},$$

et les deux contacts ont la même valeur.

b) Supposons maintenant δ transverse à X en m . Soit $0_{x_1, x_2, \dots, x_n}$ un système de coordonnées affines centré en m , l'axe des x_n correspondant à δ et $T_m X$ au sous-espace d'équations

$$x_{n-1} = x_n = 0.$$

On se donne une paramétrisation

$$\begin{cases} x_{n-1} = \Psi(x_1, \dots, x_{n-2}) \\ x_n = \theta(x_1, \dots, x_{n-2}) \end{cases}$$

où Ψ et θ sont de valuation ≥ 2 . On a une carte de G au voisinage de δ donnée par les coordonnées $(\alpha_1, \alpha'_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha'_{n-1})$ qui correspondent à la droite d'équations

$$x_i = \alpha_i + \alpha'_i x_n \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Si on considère $\mathbf{P}^n \times G$ paramétré au voisinage de (m, δ) par $x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha'_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha'_{n-1}$, les $n-1$ équations qui précèdent sont aussi celles de F dans $\mathbf{P}^n \times G$. Donc $\alpha_1, \alpha'_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha'_{n-1}$ et x_n constituent des coordonnées de F au voisinage de (m, δ) . La sous-variété A de F y est alors donnée par les équations

$$\begin{cases} \alpha_{n-1} + \alpha'_{n-1}x_n = \Psi(\alpha_1 + \alpha'_1x_n, \dots, \alpha_{n-1} + \alpha'_{n-1}x_n) \\ x_n = \theta(\alpha_1 + \alpha'_1x_n, \dots, \alpha_{n-1} + \alpha'_{n-1}x_n). \end{cases}$$

Son espace tangent en 0 est $x_n = \alpha_{n-1} = 0$. On en conclut que $\pi: A \rightarrow G$ (qui s'exprime ici par la projection parallèlement à x_n dans les coordonnées $\alpha_1, \dots, \alpha'_{n-1}, x_n$) est une immersion. De plus l'espace tangent à H en δ dans G est donné par $\alpha_{n-1} = 0$. On voit que cet espace ne dépend pas du choix des équations Ψ et θ de X , d'où le résultat.

4°) Désignons par Hilb le schéma de Hilbert des sous-variétés algébriques de codimension 2 dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ [2] et par Hilb' l'ouvert de Zariski non vide formé par celles qui sont non singulières et ne contiennent pas de droites.

PROPOSITION 22. *L'ensemble des sous-variétés non générales est un sous-ensemble algébrique de Hilb' .*

PREUVE. On considère F ; munie de la première projection pr_1 , c'est une fibration sur \mathbf{P}^n . D'autre part, au-dessus de Hilb' on a la variété \mathcal{X} ainsi définie:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\subseteq} & \mathbf{P}^n \times \text{Hilb}' \\ & \searrow p'' & \swarrow \text{pr}_2 \\ & & \text{Hilb}' \end{array} \quad (x, X) \in \mathcal{X} \Leftrightarrow x \in X$$

La projection p'' est lisse. Elle est en effet plate [2] et ses fibres sont lisses. Soit \mathcal{A} l'image réciproque de \mathcal{X} par la projection $F \times \text{Hilb}' \rightarrow \mathbf{P}^n \times \text{Hilb}'$. On vérifie alors que p' est lisse puisque p'' l'est:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xleftarrow{\subseteq} \mathcal{A} & \xrightarrow{\subseteq} F \times \text{Hilb}' \\ & \searrow p'' & \downarrow p' \swarrow \text{pr}_2 \\ & & \text{Hilb}' \end{array}$$

Notons $\Pi: \mathcal{A} \rightarrow G \times \text{Hilb}'$ la projection. C'est un morphisme fini. Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\Pi} & G \times \text{Hilb}' \\ & \searrow p' & \swarrow p \\ & & \text{Hilb}' \end{array}$$

et de la proposition 14, on déduit que X est générale si et seulement si $X \notin S(II)$.

REMARQUES. 1°) Il paraît raisonnable de conjecturer, à titre d'exemple, que l'intersection de deux hypersurfaces de degrés $\geq 2n-2$ dans P^n devient générale lorsqu'on perturbe les coefficients.

Pour $n=3$, c'est en tout cas la proposition 32.

2°) On montrera dans [4], pour une courbe C de P^3 , l'équivalence entre le fait d'être générale et une certaine condition de transversalité dans le schéma de Hilbert $\text{Hilb}^p P^3$ des p -uplets de points dans P^3 . Il paraît également raisonnable de conjecturer une équivalence analogue pour une sous-variété de codimension 2 de P^n .

II) Le cas de courbes dans $P^3(C)$.

Après ces définitions générales, nous allons donner, au paragraphe B, une caractérisation plus maniable des courbes générales dans $P^3(C)$ et également donner des exemples. Commençons par quelques

A) *Notations et lemmes utiles par la suite.*

1°) *Quadruplets de droites en position générale.*

DÉFINITION 23. Un quadruplet de droites (T_1, T_2, T_3, T_4) de $P^3(C)$ est dit en position générale si

- i) les droites sont disjointes deux à deux,
- ii) T_4 est transverse à la quadrique non dégénérée formée de toutes les droites rencontrant T_1, T_2, T_3 .

REMARQUE 24. Cette définition semble faire jouer un rôle dissymétrique à T_4 . On peut se convaincre qu'il n'en est rien en montrant que la définition est équivalente à la suivante: il existe 2 et exactement 2 droites qui rencontrent T_1, T_2, T_3, T_4 . Nous ne nous servirons d'ailleurs pas de ce fait.

LEMME 25. a) *Sur l'ensemble des quintuplets de droites $q=(T_1, T_2, T_3, \delta, \delta')$ vérifiant*

$$T_i \cap T_j = \emptyset, \quad T_i \cap \delta \neq \emptyset, \quad T_j \cap \delta' \neq \emptyset,$$

le groupe $PGL(4)$ opère transitivement.

b) *Sur l'ensemble des quintuplets de droites $q=(T_1, T_2, T_3, \delta, \delta')$ vérifiant*

$$T_i \cap \delta \neq \emptyset, \quad T_j \cap \delta' \neq \emptyset, \quad T_1 \cap T_2 = 1 \text{ point}, \quad T_i \cap T_3 = \emptyset,$$

le groupe $PGL(4)$ opère transitivement.

PREUVE. a) On remarque d'abord que les hypothèses entraînent $\delta \cap \delta' = \emptyset$. Soit $q^0 = (T_1^0, T_2^0, T_3^0, \delta^0, \delta'^0)$ un autre quintuplet et soit $m_i = T_i \cap \delta, m'_i = T_i \cap \delta'$. On commence par envoyer les deux dernières droites de q^0 sur les deux dernières de q ; à ce moment-là, par deux homographies sur δ et δ' , on envoie les images de T_1^0, T_2^0, T_3^0 sur T_1, T_2, T_3 et ces deux homographies se prolongent de manière évidente en une homographie de \mathbf{P}^3 .

b) Preuve analogue dans le second cas.

LEMME 26. Soit (T_1, T_2, T_3, T_4) un quadruplet de droites deux à deux disjointes et soit δ une droite les rencontrant toutes les quatre. Si le quadruplet n'est pas en position générale, il existe des coordonnées homogènes $(x:y:z:t)$ telles que

$$\begin{aligned} \delta &= (y=z=0), & T_1 &= (x=y-z=0), & T_2 &= (z=t=0), \\ T_3 &= (y=x-t=0) & \text{et} & & T_4 &= (y-(1-\lambda)z=x-\lambda t-\mu y=0). \end{aligned}$$

PREUVE. On se ramène, par exemple grâce au lemme 25 a) à δ, T_1, T_2, T_3 définies comme il est indiqué. L'équation de la quadrique formée des droites rencontrant T_1, T_2, T_3 est alors $yt+zx-zt=0$, d'où le résultat, si $T_4 \cap \delta = (\lambda:0:0:1)$.

2°) *Quelques variétés utiles.* On va définir quelques variétés (quasi-projectives) dont on se servira par la suite (§ B).

a) Dans l'ouvert de Zariski de $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3$ formé des triplets de points distincts, on considère

$$\text{Al}(3) = \{ (m_1, m_2, m_3) \mid m_1, m_2, m_3 \text{ alignés} \}.$$

On a une projection naturelle $\text{Al}(3) \rightarrow G$ de fibre les triplets de points distincts de \mathbf{P}^1 . On voit que $\text{Al}(3)$ est de dimension 7. On définit de la même façon $\text{Al}(4)$ et $\text{Al}(5)$ comme l'ensemble des quadruplets (respectivement quintuplets) de points distincts alignés. Ce sont des variétés de dimension 8 et 9.

b) On définit $\text{Coplan}(2)$ comme sous-variété de $\text{Al}(4) \times G \times G$ de la manière suivante:

$$(m_1, m_2, m_3, m_4)(D_1, D_2) \in \text{Coplan}(2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 \in D_1, m_2 \in D_2 \\ D_1 \text{ et } D_2 \text{ sont distincts de la droite } m_1 m_2 m_3 m_4 \text{ et } D_1 \cap D_2 \neq \emptyset. \end{cases}$$

Visiblement, $\text{Coplan}(2)$ est de dimension 11.

c) On définit $\text{Coplan}(3)$ dans $\text{Al}(3) \times G \times G$ par

$$(m_1, m_2, m_3, m_4)(D_1, D_2, D_3) \in \text{Coplan}(3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 \in D_1, m_2 \in D_2, m_3 \in D_3 \\ D_1, D_2, D_3 \text{ sont distinctes de la droite } m_1 m_2 m_3 \text{ et situées dans un même plan.} \end{cases}$$

On voit que Coplan(3) est de dimension 11.

d) Soit $\text{Pos} \subset \text{Al}(4) \times G \times G \times G \times G$ ainsi formée:

$$(m_1, m_2, m_3, m_4)(D_1, D_2, D_3, D_4) \in \text{Pos}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_i \in D_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ D_1, D_2, D_3, D_4 \text{ sont disjointes et non en position générale.} \end{cases}$$

Pos est alors une variété de dimension 15.

e) Soit enfin $\text{Osc} \subset P^3 \times P^3 \times P^{3*} \times G$ formée des quadruplets (m_1, m_2, P, D) tels que

$$\begin{cases} m_1 \neq m_2, m_1 \text{ et } m_2 \in P, \\ D \subset P, m_2 \in D, m_1 \in D. \end{cases}$$

Osc est une variété de dimension 8.

B) Caractérisation des courbes générales; singularités associées.

1°) *Enoncé du résultat.*

NOTATIONS 27. On utilisera par la suite la notation suivante: si C est une courbe non singulière et δ une droite de P^3 , si par exemple δ coupe C en trois points transversalement (c'est-à-dire avec contact 1), on dira qu'on est dans le cas $\overset{1}{\bullet} - \overset{1}{\bullet} - \overset{1}{\bullet}$. Si par exemple δ est une bitangente et que les points de contact aient exactement leur contact égal à 2, on dira qu'on est dans le cas $\overset{2}{\bullet} - \overset{2}{\bullet}$, etc.

D'après la proposition 20, cette notation vaut aussi pour $\pi^{-1}(\delta)$ rencontrant A dans F .

THÉORÈME I. *Soit C une courbe non singulière de P^3 . Alors C est générale si et seulement si les quatre conditions suivantes sont remplies:*

- a) *Pour chaque droite coupant C transversalement en m_1, m_2, m_3 , les trois tangentes $T_{m_1}C, T_{m_2}C, T_{m_3}C$ ne sont pas situées dans un même plan,*
- b) *pour chaque droite coupant C transversalement en m_1, m_2, m_3, m_4 , si les quatre tangentes $T_{m_1}C, T_{m_2}C, T_{m_3}C, T_{m_4}C$ sont disjointes, alors elles sont en position générale,*
- c) *pour chaque tangente en m_1 à C recoupant transversalement C en m_2 , le plan osculateur à C en m_1 est transverse à C en m_2 ,*
- d) *il n'apparaît aucun des cas d'intersection suivants:*

$$\overset{1}{\bullet} - \overset{1}{\bullet} - \overset{1}{\bullet} - \overset{1}{\bullet} - \overset{1}{\bullet}, \quad \overset{\geq 3}{\bullet}, \quad \overset{2}{\bullet} - \overset{1}{\bullet} - \overset{1}{\bullet} \quad \text{ou même} \quad \overset{2}{\bullet} - \overset{2}{\bullet}.$$

NOTATIONS 28. Soit C une courbe générale dans $P^3(\mathbf{C})$. On désigne par $E'_1, E'_{11}, E'_{111}, E_{1111}, E'_2$ et E_{12} les six sous-ensembles localement fermés de $H \subset G$ ainsi définis :

- $\delta \in E'_1$ si et seulement si δ coupe C une fois transversalement
- $\delta \in E'_{11}$ si et seulement si δ coupe C deux fois transversalement
- $\delta \in E'_{111}$ si et seulement si δ coupe C trois fois transversalement
- $\delta \in E_{1111}$ si et seulement si δ coupe C quatre fois transversalement
- $\delta \in E'_2$ si et seulement si δ coupe C une fois avec contact 2
- $\delta \in E_{12}$ si et seulement si δ coupe C deux fois dont une fois avec contact 1 et l'autre fois avec contact 2.

Bien sûr, E_{1111} et E_{12} sont des ensembles finis. On désigne par E_1, E_{11}, E_{111} et E_2 les adhérences dans G de E'_1, E'_{11}, E'_{111} et E'_2 .

On désigne par $F_1, F_{11}, F_{111}, F_{1111}, F_2$ et F_{12} les images réciproques de $E_1, E_{11}, E_{111}, E_{1111}, E_2$ et E_{12} par π .

Enfin, il est clair qu'on a le diagramme commutatif suivant, où les flèches sont les injections canoniques :

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_{12} & \xrightarrow{\subset} & E_2 & & & & \\
 & \searrow \subset & & \searrow \subset & & & \\
 & & E_{1111} & \xrightarrow{\subset} & E_{111} & \xrightarrow{\subset} & E_{11} \xrightarrow{\subset} E_1 = H \xrightarrow{\subset} G.
 \end{array}$$

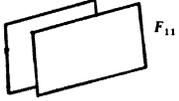
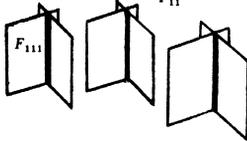
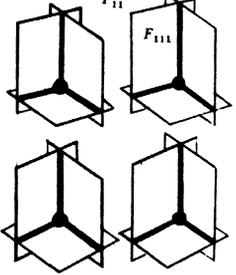
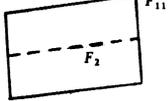
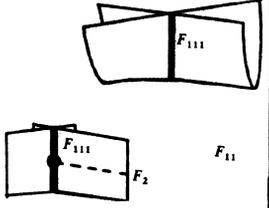
Si $\delta \in G$ et $\pi^{-1}(\delta) = \{m_1, \dots, m_k\}$, alors (u_i, v_i, w_i) désigneront des coordonnées locales convenablement choisies de A au voisinage de m_i . De même, (a, b, c, d) désignera des coordonnées locales de G au voisinage de δ convenablement choisies *et indépendantes de i* , bien sûr. La description de π et des singularités de H et de ses sous-ensembles est alors donnée par le théorème II suivant. (Voir aussi Roberts [13]).

REMARQUES 29. On a $\dim E_1 = 3, \dim E_{11} = 2, \dim E_{111} = 1$ (sauf si $E_{111} = \emptyset$), $\dim E_2 = 1, \dim E_{1111} = 0$, et $\dim E_2 = 0$.

ii) On a seulement à établir les résultats énoncés dans la deuxième colonne du tableau, ceux des deux suivantes s'en déduisant par un calcul élémentaire.

Dans ce qui suit, C est une courbe non singulière de P et δ une droite quelconque rencontrant C .

THÉORÈME II. Avec les notations précédentes, pour une courbe générale C de $P^3(C)$, on a le tableau suivant :

δ appartient à	Si $S = \pi^{-1}(\delta)$, le germe $\pi_S : (A, S) \rightarrow (G, \delta)$ est donné par	et les équations locales de H , E_{11}, E_{111} , etc. . . . sont alors	tandis que l'allure de F_{11} , F_{111} , etc. . . . au voisinage de $\pi^{-1}(\delta)$ est la suivante
E'_1	$(u, v, w) \rightarrow (0, u, v, w)$	$E_1 : (a=0)$	VIDE
E'_{11}	$(u_1, v_1, w_1) \rightarrow (0, u_1, v_1, w_1)$ $(u_2, v_2, w_2) \rightarrow (u_2, 0, v_2, w_2)$	$E_1 : (a=0) \cup (b=0)$ $E_{11} : (a=b=0)$	
E'_{111}	$(u_1, v_1, w_1) \rightarrow (0, u_1, v_1, w_1)$ $(u_2, v_2, w_2) \rightarrow (u_2, 0, v_2, w_2)$ $(u_3, v_3, w_3) \rightarrow (u_3, v_3, 0, w_3)$	$E_1 : (a=0) \cup (b=0) \cup (c=0)$ $E_{11} : (a=b=0) \cup$ les 2 autres $E_{111} : (a=b=c=0)$	
E'_{1111}	$(u_1, v_1, w_1) \rightarrow (0, u_1, v_1, w_1)$ $(u_2, v_2, w_2) \rightarrow (u_2, 0, v_2, w_2)$ $(u_3, v_3, w_3) \rightarrow (u_3, v_3, 0, w_3)$ $(u_4, v_4, w_4) \rightarrow (u_4, v_4, w_4, 0)$	$E_1 : (a=0) \cup$ les 3 autres $E_{11} : (a=b=0) \cup$ les 5 autres $E_{111} : (a=b=c=0) \cup$ les 3 autres $E_{1111} : (a=b=c=d=0)$	
E'_2	$(u, v, w) \rightarrow (uw, u, w^2, v)$	$E_1 : (b^2c - a^2 = 0)$ $E_{11} : (a=b=0)$ $E_2 : (a=b=c=0)$	
E'_{12}	$(u_1, v_1, w_1) \rightarrow (u_1 w_1, u_1, w_1^2, v_1)$ $(u_2, v_2, w_2) \rightarrow (u_2, v_2, w_2, 0)$	$E_1 : (b^2c - a^2 = 0) \cup (d=0)$ $E_{11} : (a=b=0) \cup (b^2c - a^2 = d=0)$ $E_2 : (a=b=c=0)$ $E_{111} : (a=b=d=0)$ $E_{12} : (a=b=c=d=0)$	

2°) Les cas $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$. Examinons le cas $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$, le cas $\frac{1}{2}$ ayant été examiné à la proposition 20b).

Soit m_1 et m_2 les deux points où δ rencontre C ; soit V_1 et V_2 deux germes de surfaces lisses en m_1 et m_2 , transverses à δ et contenant les germes de C en m_1 et m_2 . Toute droite voisine de δ coupe V_1 et V_2 en deux points bien définis, de sorte que $V_1 \times V_2$ constitue une carte de G au voisinage de δ . Soit x_1

(respectivement x_2) une coordonnée locale de C en m_1 (respectivement m_2). On les complète en des coordonnées (x_1, y_1) de V_1 et (x_2, y_2) de V_2 . Ainsi (x_1, y_1, x_2, y_2) est une carte de G au voisinage de δ .

Dans cette carte E_1 est visiblement défini par $\{y_1=0\} \cup \{y_2=0\}$ et E_{11} par $\{y_1=y_2=0\}$. D'où la conclusion.

3°) Le cas $\overset{\cdot}{\bullet} \text{---} \overset{\cdot}{\bullet} \text{---} \overset{\cdot}{\bullet}$. Soit m_1, m_2, m_3 les points où δ coupe C . Trois cas sont à distinguer:

- i) Les trois tangentes à C sont disjointes deux à deux.
- ii) $T_{m_2}C$ et $T_{m_3}C$ se coupent.
- iii) Elles sont toutes les trois dans un même plan.

Dans les trois cas on choisit un repère affine 0_{xyz} pour lequel δ est l'axe des z et

$$m_1 = (0, 0, 0), \quad m_2 = (0, 0, 1), \quad m_3 = (0, 0, -1).$$

De plus on supposera

— dans le cas i) (grâce par exemple au lemme 25a)

$$T_{m_1}C = (x=z=0), \quad T_{m_2}C = (y=z-1=0), \quad T_{m_3}C = (x+y=z+1=0)$$

— dans le cas ii)

$$T_{m_1}C = (x=z=0), \quad T_{m_2}C = (y=z-1=0), \quad T_{m_3}C = (x-y=z+1=0)$$

— dans le cas iii)

$$T_{m_1}C = (x=z=0), \quad T_{m_2}C = (x=z-1=0), \\ T_{m_3}C = (x=z-\lambda y+1=0).$$

D'autre part, une carte de G en δ est donnée par (a, b, c, d) représentant la droite D d'équations,

$$x = az + b \quad \text{et} \quad y = cz + d.$$

On applique alors la proposition 20b) dans les trois cas en remplaçant le germe (C, m_i) par $(T_{m_i}C, m_i)$.

Dans le cas i), D rencontre les trois tangentes si et seulement si $b=c+d=c-a+b-d=0$. Ces trois formes sont indépendantes et les germes d'hypersurface correspondants en δ dans G se coupent donc régulièrement (Définition 5). D'après le lemme 4 i) et la proposition 6, le germe de π est dans ce cas stable.

Dans le cas ii), les relations deviennent $b=c+d=d-c=0$. La conclusion est la même.

Dans le cas iii), les relations deviennent $b=-a+b=(1-\lambda c)a+b(1+\lambda d)=0$, dont les formes linéaires tangentes sont $b=-a+b=a+b=0$. Elles ne sont pas

indépendantes et le germe de π correspondant n'est pas stable. Ceci achève de prouver la condition a) du théorème I.

4°) *Le cas* $\overset{1}{\bullet} - \overset{1}{\bullet} - \overset{1}{\bullet} - \overset{1}{\bullet}$. On applique encore la proposition 20b) pour remplacer C au voisinage de chacun des quatre points par sa tangente. Soit m_1, m_2, m_3, m_4 les points où δ coupe C . On suppose la condition a) du théorème I remplie. Là encore, trois cas sont à distinguer :

- i) les quatre tangentes à C sont deux à deux disjointes.
- ii) $T_{m_3}C$ et $T_{m_4}C$ se coupent.
- iii) $T_{m_1}C$ et $T_{m_2}C$ se coupent et $T_{m_3}C$ et $T_{m_4}C$ se coupent.

Les autres cas sont exclus par la condition a) du théorème I. Dans les trois cas, on choisit un système de coordonnées homogènes $(x:y:z:t)$ pour lequel

$$m_1 = (0:0:0:1), \quad m_2 = (1:0:0:0), \quad m_3 = (1:0:0:1), \quad m_4 = (\lambda:0:0:1)$$

(avec $\lambda \neq 0$ ou 1) et pour lequel

dans le cas i), grâce par exemple au lemme 25 a),

$$T_{m_1}C = (x=y-z=0), \quad T_{m_2}C = (z=t=0), \quad T_{m_3}C = (y=x-t=0)$$

et $T_{m_4}C$ soit définie par les deux points $(\lambda:0:0:1)$ et $(\xi:\eta:\zeta:\theta)$. ($(\xi:\eta:\zeta:\theta)$ non sur les trois autres droites; en particulier η ou ζ est différent de 0).

dans le cas ii), on ait la même situation qu'en i) sauf pour $(\xi:\eta:\zeta:\theta)$ qui aura la forme particulière $(1:0:\zeta:1)$ avec $\zeta \neq 0$.

dans le cas iii), on ait la même situation qu'en ii), sauf pour $T_{m_2}C$ qui aura comme équations $y-z=t=0$. (Ceci est possible grâce au lemme 25b).

Maintenant comme δ est définie dans ces trois cas par les équations $y=z=0$, une carte de G au voisinage de δ est donnée par (a, b, c, d) représentant la droite D d'équations $y=ax+bt$ et $z=cx+dt$.

Dans le cas i), on remarque que $T_{m_1}C, T_{m_2}C, T_{m_3}C, T_{m_4}C$ sont en position générale si et seulement si $\eta + (\lambda-1)\zeta \neq 0$. On constate également que D rencontrant $T_{m_1}C, T_{m_2}C, T_{m_3}C$ et $T_{m_4}C$ s'exprime par

$$b-d = 0, \quad c = 0, \quad a+b = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a\lambda + b & a\zeta + b\theta - \eta \\ c\lambda + d & c\xi + d\theta - \zeta \end{vmatrix} = 0$$

et l'équation linéaire tangente à la dernière équation (dans les coordonnées (a, b, c, d)) est

$$-\zeta(a\lambda + b) + \eta(c\lambda + d) = 0.$$

On voit que ces quatre formes linéaires sont indépendantes si et seulement si $\eta + (\lambda-1)\zeta \neq 0$, autrement dit que $T_{m_1}C, T_{m_2}C, T_{m_3}C, T_{m_4}C$ sont en position générale.

Dans le cas ii), le calcul qui précède donne la quatrième condition linéaire $a\lambda + b = 0$. Comme λ est différent de 1, les quatre conditions $b - d = c + a + b = \lambda a + b = 0$ sont toujours indépendantes.

Dans le cas iii), la deuxième condition est à remplacer par $a - c = 0$. Les quatre formes linéaires $b - d$, $a - c$, $a + b$ et $\lambda a + b$ sont toujours linéairement indépendantes. Ceci achève de prouver la condition b) du théorème I.

5°) *Le cas $\frac{2}{3}$* . Soit δ une tangente à la courbe C de \mathbf{P}^3 en m . On va modifier les notations de la proposition 20 a): $(\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1)$ désignera ce qui y était noté $(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_1^1, \xi_2^1)$. Plus précisément, soit 0_{xyt} un système de coordonnées affines centré en m , l'axe des t correspondant à δ . Soit P_0 le plan 0_{xy} et P_1 le plan parallèle passant par $(0, 0, 1)$. $P_0 \times P_1$ constitue une carte de G au voisinage de δ . On en désigne les coordonnées par $(\alpha_0, \beta_0)(\alpha_1, \beta_1)$. Autrement dit, au voisinage de (δ, m) , la variété $G \times \mathbf{P}^3$ admet comme système de coordonnées $(x, y, t, \alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1)$ et $F \subset G \times \mathbf{P}^3$ est donné dans ce système de coordonnées par

$$\begin{cases} x = t\alpha_1 + (1-t)\alpha_0 \\ y = t\beta_1 + (1-t)\beta_0 \end{cases}$$

De sorte que $(\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, t)$ constitue une carte de F au voisinage de (δ, m) . Soit $x = \Psi(t)$, $y = \theta(t)$ une paramétration de C au voisinage de m . La sous-variété A de F est alors définie par

$$\alpha_0 = \frac{\Psi(t) - t\alpha_1}{1-t} \quad \text{et} \quad \beta_0 = \frac{\theta(t) - t\beta_1}{1-t}$$

Ainsi (α_1, β_1, t) forme un système de coordonnées locales dans A au voisinage de (δ, m) et l'application $\pi: A \rightarrow G$ est donnée, au voisinage de (δ, m) , par

$$\mathbf{C}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbf{C}^4 \\ (\alpha_1, \beta_1, t) \mapsto \left(\frac{\Psi(t) - t\alpha_1}{1-t}, \frac{\theta(t) - t\beta_1}{1-t}, \alpha_1, \beta_1 \right)$$

soit encore en modifiant les notations et permutant l'ordre:

$$(z_1, z_2, z_3) \mapsto \left(z_1, z_2, \frac{\Psi(z_3) - z_1 z_3}{1-z_3}, \frac{\theta(z_3) - z_2 z_3}{1-z_3} \right)$$

Comme le contact de δ avec C est 2, alors θ ou Ψ a une valuation égale à 2. Avec les notations des propositions 8 et 9, on a

$$u = \begin{bmatrix} \frac{\Psi(z_3)}{1-z_3} \\ \frac{\theta(z_3)}{1-z_3} \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} -z_3 \\ 1-z_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -z_3 \\ 1-z_3 \end{bmatrix}$$

d'où $Q_4(u) \cong C[z_3]/(z_3^2)$. La condition de la proposition 8 est ainsi satisfaite, donc le germe est stable. Il existe alors (proposition 9) des systèmes de coordonnées locales (x_1, x_2, x_3) dans C^3 et (a, b, c, d) dans C^4 pour lesquels π est donné par

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 x_3, x_1, x_3^2, x_2).$$

On en déduit l'équation de H : $b^2c - a^2 = 0$.

Puis on cherche E_{11} : au-dessus de chaque point de E_{11} , la fibre de π est formée de deux points. Ce n'est le cas que pour $x_1 = 0$. D'où les équations de E_{11} : $a = b = 0$.

De même, au-dessus de E_2 , la fibre de π est un point double. Ceci n'est le cas que pour $x_3 = 0$. D'où les équations de E_2 : $a = b = c = 0$.

6°) *Le cas $\frac{1}{2}$* . Soit C une courbe de P^3 et δ une tangente à C en m_1 (avec contact 2) qui recoupe C transversalement en m_2 . On va voir que le germe correspondant n'est stable que lorsque la condition c) du théorème I est vérifiée.

Les notations sont pratiquement les mêmes qu'au paragraphe précédent: on choisit le système affine 0_{xyt} centré en m de telle sorte que $m_1 = (0, 0, 0)$ et $m_2 = (0, 0, 1)$. De même $T_{m_2}C$ est choisie égale à la droite $t = 1, y = 0$. La courbe C se laisse définir au voisinage de m_2 par $x = u, y = S(u), z = 1 + T(u)$ avec $S'(0) = T'(0) = 0$.

Le germe de H en δ se décompose visiblement en deux composantes irréductibles H' et H'' , suivant que δ coupe C au voisinage de m_1 ou de m_2 . La composante H'' est lisse (d'après le cas $\frac{1}{2}$) et la composante H' est donnée dans une certaine carte (a, b, c, d) de G en δ par $b^2c - a^2 = 0$, d'après le cas $\frac{2}{2}$. La composante H' contient la courbe lisse E'_2 formée des tangentes au voisinage de m_1 . On va montrer que la condition c) du théorème I est ici vérifiée si et seulement si E'_2 est transverse à H'' .

Dans la carte $(\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1)$ de G , cherchons une représentation paramétrique de E'_2 . La tangente à C au point $(\Psi(t), \theta(t), t)$ ayant pour représentation paramétrique

$$\lambda \mapsto \begin{cases} \Psi(t) - \lambda \Psi'(t) \\ \theta(t) - \lambda \theta'(t) \\ t - \lambda \end{cases}$$

on calcule ainsi facilement $\alpha_0(t), \beta_0(t), \alpha_1(t), \beta_1(t)$. Par exemple, $\beta_1(t) = \theta(t) + (1-t)\theta'(t)$. Cherchons maintenant, toujours dans la carte $(\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1)$, l'espace tangent à H'' .

D'après la proposition 20 b), il suffit de remplacer en m_2 la courbe C par sa

tangente. Dans la carte indiquée, l'ensemble des droites qui rencontrent $T_{m_2}C$ s'exprime par $\beta_1=0$. C'est donc aussi l'espace tangent à H'' dans T_0C^4 .

Revenons à la courbe E'_2 dans C^4 ; elle est donc transverse à H'' si et seulement si la quatrième coordonnée du vecteur tangent en 0 à E'_2 , à savoir

$$\frac{d}{dt}(\theta(t) + (1-t)\theta'(t))(0) = \theta''(0)$$

est différente de 0. Ceci signifie justement que le plan osculateur à C en m_1 est transverse à $T_{m_2}C$, d'après la forme même de la paramétration de C au voisinage de m_1 .

Or dire que E'_2 est transverse à H'' , c'est précisément dire (lemme 4 et proposition 6) que $\tau_{m_1}\pi$ et $\tau_{m_2}\pi$ se coupent régulièrement, d'où le résultat.

7°) *Les autres cas.*

i) les cas $\overset{1}{\bullet}\overset{1}{\bullet}\overset{1}{\bullet}\overset{1}{\bullet}\overset{1}{\bullet}$. Ce cas est immédiat, d'après la remarque 7. Le germe correspondant n'est jamais stable.

ii) le cas $\overset{2}{\bullet}\overset{1}{\bullet}\overset{1}{\bullet}$. D'après le cas $\overset{2}{\bullet}$, le germe de π au point double m_1 est donné dans des cartes convenables par

$$(u, v, w) \mapsto (uw, u, w^2, v).$$

On obtient ainsi (définition 3 et lemme 4) trois sous-espaces $\tau_{m_1}\pi, \tau_{m_2}\pi, \tau_{m_3}\pi$ de C^4 de codimension 3, 1 et 1. Ils ne peuvent évidemment se couper régulièrement et par suite (proposition 6) le germe de π en (m_1, m_2, m_3) n'est pas stable. Même chose pour le cas $\overset{2}{\bullet}\overset{2}{\bullet}$.

iii) le cas $\overset{\geq 3}{\bullet}$. On utilise les mêmes notations que dans le cas $\overset{2}{\bullet}$. Mais cette fois, le contact de δ avec C est ≥ 3 , donc θ et Ψ ont des valuations ≥ 3 . D'où (avec les notations de la proposition 9)

$$Q_4(u) = \frac{C[\xi_3]}{(\xi_3)^3}.$$

Dans $Q_4(u)$, on a

$$\frac{-\xi_3}{1-\xi_3} = -\xi_3 - \xi_3^2$$

et dans $Q_4(u)^2$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_3} = \begin{pmatrix} \alpha \xi_3^2 \\ \beta \xi_3^2 \end{pmatrix}$$

où α et β sont des scalaires (éventuellement nuls si la valuation de Ψ ou θ est > 3). Dans $Q_4(u)^2$, on a visiblement

$$C_{\{\xi_3\}} \begin{pmatrix} \alpha \xi_3^2 \\ \beta \xi_3^2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha \xi_3^2 \\ \beta \xi_3^2 \end{pmatrix}$$

de sorte qu'on a nécessairement $Q_4(u)^2$ différent de

$$E = C^2 \oplus C \begin{pmatrix} -\xi_3 - \xi_3^2 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus C \begin{pmatrix} 0 \\ -\xi_3 - \xi_3^2 \end{pmatrix} \oplus C \begin{pmatrix} \alpha \xi_3^2 \\ \beta \xi_3^2 \end{pmatrix}$$

car E est de dimension au plus 5 et $Q_4(u)^2$ de dimension 6.

La condition de la proposition 6 n'est ainsi pas satisfaite et le germe correspondant $\pi: A \rightarrow G$ n'est donc pas stable.

III) Exemples de courbes générales.

A) *Le cas particulier des courbes planes ou situées sur une quadrique.*

Soit C une courbe de \mathbf{P}^3 . Examinons d'abord le cas des courbes planes. Si C est stable, vu la remarque 17, son degré est au moins 2 et vu la condition a) du théorème I, son degré est au plus 2. *Les seules courbes planes générales sont donc les coniques*, les conditions du théorème I étant alors trivialement vérifiées.

Supposons maintenant C située sur une quadrique non dégénérée Q . On choisit un plongement fixé $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^3$ dont l'image est Q . Alors $j^{-1}(C)$ est de bidegré (p, q) dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et C est de degré $p+q$ et de genre $(p-1)(q-1)$.

Si C est générale, la condition iv) du théorème I entraîne $p \leq 4$, et $q \leq 4$ sinon les génératrices de Q rencontreraient C en 5 points. On a d'ailleurs les

REMARQUES 28. i) Une droite δ de \mathbf{P}^3 rencontrant C avec les contacts suivants:

$$\begin{matrix} \geq 3 \\ \text{---} \end{matrix} \text{ ou } \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{matrix} \text{ ou } \begin{matrix} 2 & 1 \\ \bullet & \bullet \end{matrix} \text{ ou } \begin{matrix} 2 & 2 \\ \bullet & \bullet \end{matrix}$$

(notations 27) est nécessairement une génératrice de Q puisque Q est une surface de degré 2.

ii) Si δ est une génératrice de Q rencontrant C en m_1 et m_2 , $T_{m_1}C$ et $T_{m_2}C$ sont alors disjointes, puisque situées dans le plan $T_{m_1}Q$ et $T_{m_2}Q$ n'ayant en commun que δ .

Cas p et $q \leq 2$. Une courbe C de bidegré (p, q) avec p et $q \leq 2$ est toujours générale, les cas d'intersection

$$\begin{matrix} \geq 3 \\ \text{---} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 2 & 1 \\ \bullet & \bullet \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 2 & 2 \\ \bullet & \bullet \end{matrix}$$

étant exclus pour des raisons évidentes de degré. Les conditions du théorème I sont alors remplies. Le cas $(p, q) = (1, 1)$ est une conique; le cas $(1, 2)$ est la

cubique gauche; le cas (2, 2) est l'intersection complète de deux quadriques (degré 4, genre 1).

Cas p ou $q=4$. On va voir que dans ce cas, C n'est jamais générale. Soit δ une génératrice rencontrant transversalement C en m_1, m_2, m_3, m_4 . De la remarque 28 ii) résulte que les quatre tangentes sont disjointes deux à deux. Mais la quadrique définie par les droites coupant $T_{m_1}C, T_{m_2}C, T_{m_3}C$ est visiblement Q elle-même: on impose à cette quadrique de passer par trois points et d'avoir en ces points un plan tangent déterminé. Puisqu'alors $T_{m_4}C$ est tangente à Q , les quatre tangentes ne sont pas en position générale et la condition b) du théorème I n'est pas satisfaite.

Cas p et $q \leq 3$. Pour des raisons de degré, les cas d'intersection $\overset{1}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{1}{\bullet}$ et $\overset{2}{\bullet} \overset{2}{\bullet}$ sont exclus. Soit maintenant δ une trisécante ($\overset{1}{\bullet} \overset{1}{\bullet} \overset{1}{\bullet}$). Vu la remarque 28 i), δ est une génératrice de Q et d'après ii) les trois tangentes sont disjointes deux à deux. La condition a) du théorème I est ainsi satisfaite. Puis, on a le lemme immédiat:

LEMME 29. Soit S une surface réglée dans P^3 et soit $C \subset S$ une courbe tangente en m , à l'ordre 2, à la génératrice δ passant par m . Le plan osculateur à C en m est alors T_mS .

De ce lemme et de la remarque ii) résulte que dans le cas $\overset{1}{\bullet} \overset{2}{\bullet}$, la condition c) du théorème I est remplie.

Reste à examiner le cas d'intersection $\overset{3}{\bullet}$. Une telle droite δ est une génératrice de Q . D'autre part, l'ensemble des courbes de $P^1 \times P^1$ de bidegré (1, 3) (respectivement (2, 3), (3, 3)) est paramétré par les coefficients de leur équation à une constante près, soit par P^7 (respectivement P^{11}, P^{15}). On voit facilement que les courbes de $P^1 \times P^1$ admettant $\{x\} \times P^1$ ou $P^1 \times \{y\}$ comme tangente d'inflexion, forment un sous-ensemble algébrique propre de P^7 (respectivement P^{11}, P^{15}). Toute courbe C de P^3 telle que $j^{-1}(C)$ soit dans l'ouvert de Zariski non vide complémentaire est donc générale.

Notons que les courbes de bidegré (2, 3), donc de degré 5 et genre 2, donnent un exemple de courbe générale ni intersection complète ni rationnelle.

B) Les cas des intersections complètes.

Si S et S' sont deux surfaces de degrés k et l se coupant transversalement en dehors de leurs lieux singuliers, on se demande si la courbe $C = S \cap S'$ est générale. Le cas k ou $l=1$ ou 2 a été envisagé en A). On suppose donc k et $l \geq 3$.

Tout d'abord, si $k=3$ et $l \geq 5$, on est sûr que C n'est jamais stable. Les 27 droites contenues dans la surface cubique rencontrent en effet chacune C en plus de quatre points.

On verra dans ce qui suit les cas $(3, 3)$, $(3, 4)$ et (k, l) avec k et $l \geq 4$ donnent « presque toujours » des courbes générales. Pour cela, précisons les notations.

NOTATION 30. Soit $N(k) + 1 = \binom{k+3}{3}$ le nombre de quadruplets $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{N}^4$ avec $\alpha + \beta + \gamma + \delta = k$.

L'ensemble des formes homogènes de degré k en quatre variables, à une constante près, s'identifie alors à $\mathbf{P}^{N(k)}$.

PROPOSITION 31. Il existe un ouvert de Zariski non vide, noté $\Omega(k, l)$ de $\mathbf{P}^{N(k)} \times \mathbf{P}^{N(l)}$ tel que pour $(f, g) \in \Omega(k, l)$, les deux surfaces $S=f^{-1}(0)$ et $S'=g^{-1}(0)$ se coupent transversalement en des points réguliers.

PREUVE. On considère dans $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^{N(k)} \times \mathbf{P}^{N(l)}$ l'ensemble M ainsi défini :

$$(m, f, g) \in M \Leftrightarrow \begin{cases} f(m) = g(m) = 0 \\ d_m f \wedge d_m g = 0. \end{cases}$$

En comptant les constantes, on s'aperçoit que la fibre de la projection $M \rightarrow \mathbf{P}^3$ est de dimension $N(k) + N(l) - 4$; on en déduit que M est de dimension $\leq N(k) + N(l) - 1$. On prend pour $\Omega(k, l)$ le complémentaire de la projection de M sur $\mathbf{P}^{N(k)} \times \mathbf{P}^{N(l)}$. On va d'ailleurs se servir constamment dans la suite de ce type d'argument. Ceci étant posé, on a la

PROPOSITION 32. Soit k, l des entiers ≥ 4 (ou bien $(k, l) = (3, 3)$ ou bien $(k, l) = (3, 4)$). Alors pour (f, g) dans un ouvert de Zariski non vide de $\mathbf{P}^{N(k)} \times \mathbf{P}^{N(l)}$, la courbe $C=S \cap S'$ est générale ($S=f^{-1}(0)$ et $S'=g^{-1}(0)$).

On utilisera la notation suivante :

NOTATION 33. Si $(x:y:z:t)$ est un système de coordonnées homogènes fixé dans \mathbf{P}^3 , on écrira la forme homogène f de degré k sous la forme :

$$f(x, y, z, t) = \sum_{j=0}^k a_j t^{k-j} x^j + y \left(\sum_{j=0}^{k-1} b_j t^{k-1-j} x^j \right) + z \left(\sum_{j=0}^{k-1} c_j t^{k-1-j} x^j \right) + y^2(d + \dots) + z^2(e + \dots) + yz(f + \dots).$$

On a alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{j=0}^k j a_j t^{k-j} x^{j-1} + y(\dots) + z(\dots)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{j=0}^{k-1} b_j t^{k-j-1} x^j + y(\dots) + z(\dots)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{j=0}^{k-1} c_j t^{k-j-1} x^j + y(\dots) + z(\dots)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{j=0}^k (k-j) a_j t^{k-j-1} x^j + y(\dots) + z(\dots).$$

On notera de la même façon g avec des lettres primées.

PREUVE DE LA PROPOSITION 32. 1°) *Cas de un point.* Lorsqu'une droite coupe une courbe générale, on demande que le contact (définition 18) soit au plus 2. Cela conduit à considérer l'ensemble

$M_1 \subset F \times \Omega(k, l)$ formé des $(m, \delta)(f, g)$ tels que

$$\begin{cases} \text{A) } f(m) = g(m) = 0 \\ \text{B) } \delta \text{ coupe } C \text{ en } m \text{ avec un contact } \geq 3. \end{cases}$$

(Rappelons-le, F est l'ensemble des (m, δ) avec $m \in \delta$; C est la courbe $f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$).

LEMME 34. M_1 est de dimension $\leq N(k) + N(l) - 1$.

PREUVE. On utilise le même argument que dans la Proposition 31, ce qu'on fait tout le long de la preuve de la proposition 32.

Soit (m_0, δ_0) fixé dans F et regardons la fibre de M_1 au-dessus de (m_0, δ_0) pour la projection naturelle $M_1 \rightarrow F$. On va montrer que cette fibre est de codimension 6 dans $\Omega(k, l)$. En effet, choisissons un système de coordonnées homogènes $(x: y: z: t)$ pour lequel m_0 est le point $(0: 0: 0: 1)$ et δ_0 la droite $y = z = 0$.

Dans ce cas, avec les notations indiquées plus haut pour f et g , la condition A) s'exprime clairement par

$$a_0 = a'_0 = 0$$

et la condition B) par

$$a_1 = a_2 = a'_1 = a'_2 = 0.$$

Ces six équations linéaires indépendantes définissent un ensemble de codimension 6 dans $\Omega(k, l)$. Comme F est de dimension 5, on en déduit que M_1 est de dimension $\leq N(k) + N(l) - 6 + 5$.

2°) *Cas de deux points.* a) Enlevons de $P^3 \times P^3$ la diagonale Δ et considérons dans $(P^3 \times P^3 - \Delta) \times \Omega(k, l)$ l'ensemble M_2 suivant

$$(m_1, m_2)(f, g) \in M_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{A) } f(m_i) = g(m_i) = 0 & 1 \leq i \leq 2 \\ \text{B) } \text{la droite } m_1 m_2 \text{ est tangente à } C \text{ en } m_1 \text{ et } m_2. \end{cases}$$

LEMME 35. M_2 est de dimension $\leq N(k) + N(l) - 2$.

PREUVE. Comme précédemment, cherchons la fibre de la projection $M_2 \rightarrow P^3 \times P^3 - \Delta$ en (m_1, m_2) . On choisit un système $(x:y:z:t)$ pour lequel $m_1 = (0:0:0:1)$ et $m_2 = (1:0:0:0)$. Toujours avec la notation 33 pour f et g , A) s'exprime par

$$a_0 = a'_0 = a_k = a'_k = 0$$

et B) par

$$a_1 = a'_1 = a_{k-1} = a'_{k-1} = 0.$$

Ces 8 équations linéaires indépendantes montrent que la fibre est de codimension 8, d'où le résultat vu que $P^3 \times P^3$ est de dimension 6.

b) Maintenant dans $\text{Osc} \times \Omega(k, l)$ (notation de II.A.2) on considère M_3 ainsi défini:

$$(m_1, m_2, P, D)(f, g) \in M_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{A) } f(m_i) = g(m_i) = 0 & 1 \leq i \leq 2 \\ \text{B) } T_{m_1} C \text{ est la droite } m_1 m_2 \\ \text{C) } T_{m_2} C = D \\ \text{D) } \text{Osc}_{m_1}(C) = P \end{cases}$$

LEMME 36. M_3 est de dimension $N(k) + N(l) - 1$.

PREUVE. Comme d'habitude, on regarde la fibre de $M_3 \rightarrow \text{Osc}$ et on montre qu'elle est de dimension $N(k) + N(l) - 9$: après choix de $(x:y:z:t)$, on est ramené à

$$\begin{aligned} m_1 &= (0:0:0:1) & m_2 &= (1:0:0:0) \\ P &= \{z=0\} & D &= \{z=t=0\}. \end{aligned}$$

Les conditions A) B) C) et D) s'expriment (notation de II.A.2) ainsi:

- A) $a_0 = a'_0 = a_k = a'_k = 0$
- B) $a_1 = a'_1 = 0$
- C) $b_{k-1} = b'_{k-1} = 0$.

Pour ce qui est de la condition D), cherchons l'équation du plan osculateur à C en m_1 . Pour cela, on remplace, en tenant compte des conditions A) B) C) précédentes, l'équation de S au voisinage de m_1 par l'équation

$$F(x, y, z) = a_2x^2 + b_1xy + c_1xz + b_0y + c_0z + dy^2 + ez^2 + fyz$$

où l'on a négligé les termes de degré ≥ 3 . On fait de même pour g et on obtient G .

Pour chercher le plan osculateur en $(0, 0, 0)$ de l'intersection des deux quadriques $F=0$ et $G=0$ de C^3 , on projette leur intersection sur le plan $0yz$. Posons

$$l_0 = b_0y + c_0z, \quad l_1 = b_1y + c_1z$$

et de même l'_0 et l'_1 avec des lettres primées. Le cône tangent en $(0, 0)$ à cette projection est alors donné par l'équation

$$\begin{vmatrix} 0 & l_0 & l'_0 & 0 \\ l_0 & l_1 & l'_1 & l'_0 \\ l_1 & a_2 & a'_2 & l'_1 \\ a_2 & 0 & 0 & a'_2 \end{vmatrix} = 0$$

qui s'obtient en négligeant les termes d'ordre supérieur dans le résultant de F et G considéré comme polynôme en x . Ce déterminant développé vaut $(a_2l'_0 - a'_2l_0)^2$ soit:

$$((a_2b'_0 - a'_2b_0)y + (a_2c'_0 - a'_2c_0)z)^2.$$

Le plan osculateur cherché a donc pour équation:

$$(a_2b'_0 - a'_2b_0)y + (a_2c'_0 - a'_2c_0)z = 0$$

et dire qu'il est égal à P , c'est imposer la condition

$$D) \quad a_2b'_0 - a'_2b_0 = 0.$$

On obtient ainsi avec A) B) C) D) neuf équations indépendantes dans $\Omega(k, l)$; d'où le lemme puisque Osc est de dimension 8.

3°) *Cas de trois points.* a) Dans $Al(3) \times \Omega(k, l)$ (notations de II.A.2), on considère l'ensemble M_4 ainsi défini:

$$(m_1, m_2, m_3)(f, g) \in M_4 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{A) } f(m_i) = g(m_i) = 0 & 1 \leq i \leq 3 \\ \text{B) } T_{m_i}C = \text{la droite } m_1m_2m_3 \end{cases}$$

LEMME 37. M_4 est de dimension $\leq N(k) + N(l) - 1$.

PREUVE. On cherche la fibre de $M_4 \rightarrow Al(3)$ en (m_1, m_2, m_3) et on montre qu'elle est de dimension 8. On choisit $(x:y:z:t)$ de telle sorte que

$$m_1 = (0:0:0:1) \quad m_2 = (1:0:0:0) \quad m_3 = (1:0:0:1).$$

La condition A) s'exprime alors immédiatement par

$$\begin{cases} a_0 = a_k = \sum_{j=0}^k a_j = 0 \\ a'_0 = a'_l = \sum_{j=0}^l a'_j = 0. \end{cases}$$

Pour ce qui est de la condition B), comme les deux équations de $T_{m_1}S$ et $T_{m_1}S'$ sont les suivantes:

$$\begin{cases} a_1X + b_0Y + c_0Z = 0 \\ a'_1X + b'_0Y + c'_0Z = 0, \end{cases}$$

on doit avoir $a_1 = a'_1 = 0$. On obtient ainsi 8 équations indépendantes dans $\Omega(k, l)$, d'où le résultat, puisque $Al(3)$ est de dimension 7.

b) Dans Coplan (3) $\times \Omega(k, l)$ (notations de II.A.2), on définit M_5 par

$$(m_1, m_2, m_3, D_1, D_2, D_3)(f, g) \in M_5 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{A) } f(m_i) = g(m_i) = 0 & 1 \leq i \leq 3 \\ \text{B) } T_{m_i}C = D_i & 1 \leq i \leq 3. \end{cases}$$

LEMME 38. M_5 est de dimension $\leq N(k) + N(l) - 1$.

PREUVE. On cherche la fibre $M_5 \rightarrow$ Coplan (3) en $(m_1, m_2, m_3, D_1, D_2, D_3)$

PREMIER CAS. D_1, D_2, D_3 ne sont pas concourantes. On choisit $(x:y:z:t)$ pour que

$$\begin{aligned} m_1 &= (0:0:0:1) & m_2 &= (1:0:0:0) & m_3 &= (1:0:0:1) \\ D_1 &= \{x=z=0\} & D_2 &= \{z=y-t=0\} & D_3 &= \{z=x-t=0\}. \end{aligned}$$

Comme dans le paragraphe a) qui précède, A) donne six équations indépendantes. En posant, pour simplifier l'écriture

$$\alpha = \sum_{j=0}^k ja_j \quad \beta = \sum_{j=0}^{k-1} b_j, \quad \gamma = \sum_{j=0}^{k-1} c_j$$

(et de même pour β' et γ'), on constate que les équations de $T_{m_1}S, T_{m_2}S, T_{m_3}S$ sont données par les formes linéaires suivantes sur C^4 :

$$\begin{cases} (a_1 & b_0 & c_0 & 0) \\ (0 & b_{k-1} & c_{k-1} & a_{k-1}) \\ (\alpha & \beta & \gamma & -\alpha) \end{cases}$$

de sorte que la condition B) s'exprime par

$$b_0 = b'_0 = 0, \quad b_{k-1} + a_{k-1} = b'_{l-1} + a'_{l-1} = 0, \quad \beta = \beta' = 0.$$

Les conditions A) et B) réunies donnent 12 équations linéaires visiblement indépendantes. La fibre de $M_5 \rightarrow \text{Coplan (3)}$ est donc de codimension 12.

DEUXIÈME CAS. D_1, D_2, D_3 sont concourantes. On se ramène au même choix que précédemment, sauf pour $D_2 = \{z = t = 0\}$; les trois droites se coupent en $(0 : 1 : 0 : 0)$. La condition B) devient

$$b_0 = b'_0 = 0, \quad b_{k-1} = b'_{l-1} = 0, \quad \beta = \beta' = 0.$$

Même conclusion que ce qui précède. Comme Coplan (3) est de dimension 11, on en déduit le résultat annoncé.

4°) *Cas de quatre points.* a) On définit M_6 dans Coplan $(2) \times \Omega(k, l)$ (notations de II.A.2) par

$$(m_1, m_2, m_3, m_4, D_1, D_2)(f, g) \in M_6 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{A) } f(m_i) = g(m_i) = 0 & 1 \leq i \leq 4 \\ \text{B) } T_{m_1}C = D_1 \quad \text{et} \quad T_{m_2}C = D_2 \end{cases}$$

LEMME 39. M_6 est de dimension $\leq N(k) + N(l) - 1$.

PREUVE. On cherche la fibre de $M_6 \rightarrow \text{Coplan (2)}$. Par un choix de coordonnées $(x : y : z : t)$ on se ramène à

$$m_1 = (0 : 0 : 0 : 1), \quad m_2 = (1 : 0 : 0 : 0), \quad m_3 = (1 : 0 : 0 : 1)$$

$$m_4 = (\lambda : 0 : 0 : 1) \quad (\text{avec } \lambda \neq 0 \text{ et } 1)$$

et

$$D_1 = \{x = z = 0\}, \quad D_2 = \{z = t = 0\}.$$

La condition A) s'exprime par

$$a_0 = a_k = \sum_{j=0}^k a_j = \sum_{j=0}^k \lambda^j a_j = 0$$

et idem avec les lettres primées. La condition B) s'exprime elle par

$$b_0 = b'_0 = 0 \quad \text{et} \quad b_{k-1} = b'_{l-1} = 0.$$

D'où 12 équations linéaires indépendantes; d'où le résultat, puisque Coplan (2) est de dimension 11.

b) On définit M_7 dans $\text{Pos} \times \Omega(k, l)$ (notations de II.A.2) par

$$(m_1, m_2, m_3, m_4, D_1, D_2, D_3, D_4)(f, g) \in M_7 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{A) } f(m_i) = g(m_i) = 0 & 1 \leq i \leq 4 \\ \text{B) } T_{m_i}C = D_i & 1 \leq i \leq 4. \end{cases}$$

LEMME 40. M_7 est de dimension $\leq N(k) + N(l) - 1$.

PREUVE. On regarde la fibre de $M_7 \rightarrow \text{Pos}$. Soit $(m_1, m_2, m_3, m_4, D_1, D_2, D_3, D_4)$ fixé dans Pos. D'après le lemme 26, on peut choisir un système de coordonnées homogènes $(x:y:z:t)$ pour lequel

$$m_1 = (0:0:0:1), \quad m_2 = (1:0:0:0), \quad m_3 = (1:0:0:1),$$

$$m_4 = (\lambda:0:0:1) \quad (\text{avec } \lambda \neq 0 \text{ ou } 1)$$

et

$$D_1 = \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}, \quad D_2 = \begin{cases} z=0 \\ t=0 \end{cases}, \quad D_3 = \begin{cases} y=0 \\ x=t \end{cases}, \quad D_4 = \begin{cases} y=(1-\lambda)z \\ x=\lambda t + \mu y \end{cases}$$

La condition A) s'exprime par les mêmes relations qu'en a): elle donne 8 équations linéaires.

Posons maintenant, pour simplifier l'écriture,

$$\alpha = \sum_{j=0}^k ja_j, \quad \alpha_\lambda = \sum_{j=0}^k \lambda^{j-1} ja_j$$

$$\beta = \sum_{j=0}^{k-1} b_j, \quad \beta_\lambda = \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j b_j$$

$$\gamma = \sum_{j=0}^{k-1} c_j, \quad \gamma_\lambda = \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j c_j.$$

Les formes linéaires sur C^4 définissant $T_{m_1}S, T_{m_2}S, T_{m_3}S$ et $T_{m_4}S$ sont

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_0 & c_0 & 0 \\ 0 & b_{k-1} & c_{k-1} & a_{k-1} \\ \alpha & \beta & \gamma & -\alpha \\ \alpha_\lambda & \beta_\lambda & \gamma_\lambda & -\lambda\alpha_\lambda \end{pmatrix}.$$

On introduit de même $\alpha', \alpha'_\lambda, \beta', \beta'_\lambda, \gamma', \gamma'_\lambda$ ce qui permet d'exprimer $T_{m_i}S'$, pour $1 \leq i \leq 4$, de la même façon.

La condition B) concernant $T_{m_1}C$ s'exprime par

$$\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & b_0 & c_0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \neq 3 \quad \text{et}$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \alpha'_1 & b'_0 & c'_0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \neq 3,$$

les deux dernières lignes étant des équations de D_1 . Idem avec les trois autres droites. On obtient ainsi pour B) des relations:

$$\begin{aligned} b_0 + c_0 &= b'_0 + c'_0 = 0 \\ b_{k-1} &= b'_{l-1} = 0 \\ \gamma &= \gamma' = 0 \\ (\lambda - 1)(\beta_\lambda - \mu\alpha_\lambda) - \gamma_\lambda &= (\lambda - 1)(\beta'_\lambda - \mu\alpha'_\lambda) - \gamma'_\lambda = 0. \end{aligned}$$

Du fait que λ est différent de 0 et 1, on constate que ces 8 conditions jointes aux 8 conditions de A) sont indépendantes. La fibre de $M_7 \rightarrow \text{Pos}$ est donc de codimension 16, d'où le résultat annoncé puisque Pos est de dimension 15.

5°) *Le cas de cinq points.* Dans $\text{Al}(5) \times \Omega(k, l)$ (notations de II.A.2), on définit l'ensemble M_8 par

$$(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)(f, g) \in M_8 \Leftrightarrow f(m_i) = g(m_i) = 0 \quad 1 \leq i \leq 5$$

LEMME 41. Si k et l sont ≥ 4 , M_8 est de dimension $\leq N(k) + N(l) - 1$.

PREUVE. On regarde la fibre de $M_8 \rightarrow \text{Al}(5)$. Après choix de coordonnées homogènes $(x:y:z:t)$, on est ramené à

$$\begin{aligned} m_1 &= (0:0:0:1), & m_2 &= (1:0:0:0), & m_3 &= (1:0:0:1), \\ m_4 &= (\lambda:0:0:1), & m_5 &= (\mu:0:0:1) \end{aligned}$$

avec $\lambda \neq \mu$ et différents de 0 ou 1. Les conditions définissant la fibre dans $\Omega(k, l)$ s'expriment par les 10 conditions linéaires suivantes:

$$\begin{aligned} a_0 = a_k &= \sum_{j=0}^k a_j = \sum_{j=0}^k \lambda^j a_j = \sum_{j=0}^k \mu^j a_j = 0 \\ a'_0 = a'_l &= \sum_{j=0}^l a'_j = \sum_{j=0}^l \lambda^j a'_j = \sum_{j=0}^l \mu^j a'_j = 0. \end{aligned}$$

Comme on a supposé k et $l \geq 4$, elles sont indépendantes. D'où le résultat annoncé, $\text{Al}(5)$ étant de dimension 9.

6°) CONCLUSION. Grâce aux lemmes 34 à 41, on voit que la réunion Z des différentes projections de M_1, \dots, M_8 dans $\Omega(k, l)$ ne recouvrent pas $\Omega(k, l)$ qui est de dimension $N(k) + N(l)$. D'autre part, on a une application algébrique $\Phi: \Omega(k, l) \rightarrow \text{Hilb}'$ (notations de la proposition 22) qui à (f, g) associe $C = S \cap S'$. Comme les courbes générales forment un ouvert de Zariski V de Hilb' (proposition 22), on a un ouvert de Zariski $\Phi^{-1}(V)$ de $\Omega(k, l)$. Cet ouvert est non vide puisque, par construction même de M_1, \dots, M_8 , si $(f, g) \notin Z$, alors

$C = S \cap S'$ est générale d'après le théorème I. Notons qu'enlever M_6 était facultatif. (Remarquons que le lemme 41 n'est valable que pour k et $l \geq 4$. Cependant si $k=3$, ce lemme n'est pas utile pour établir la proposition 32, une droite coupant S en cinq points y étant alors toute entière contenue: mais on a exclu au début le cas $k=3$ et $k \geq 5$.)

REMARQUE 42. On a traité le cas des intersections complètes. On peut également traiter le cas des intersections partielles résiduelles à une droite par le même genre d'arguments.

C) *Le cas des courbes rationnelles.*

On cherche à savoir si la courbe C de P^3 , image de P^1 par une application polynomiale de degré k

$$(A, B, C, D): P^1 \rightarrow P^3$$

est générale. On montre que c'est génériquement le cas pour $k \geq 2$. La méthode est la même que dans le cas des intersections complètes: on compte les constantes; on épargnera les calculs au lecteur.

L'ensemble des quadruplets $(A : B : C : D)$ à une constante près de polynômes homogènes de degré k en deux variables, s'identifie à P^{4k+3} . On va voir que ceux qui donnent un plongement de P^1 dans P^3 forment un ouvert de Zariski non vide de P^{4k+3} .

Considérons dans $P^1 \times P^1 \times P^{4k+3}$ l'ensemble M_1 ainsi défini.

$$(x:t)(x':t')(A:B:C:D) \in M_1$$

$$\Leftrightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} A(x,t) & B(x,t) & C(x,t) & D(x,t) \\ A(x',t') & B(x',t') & C(x',t') & D(x',t') \end{pmatrix} \leq 1$$

et dans $P^1 \times P^{4k+3}$ l'ensemble M_2 :

$$(x,t)(A,B,C,D) \in M_2$$

$$\Leftrightarrow \text{rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial x}(x,t) & \frac{\partial B}{\partial x}(x,t) & \frac{\partial C}{\partial x}(x,t) & \frac{\partial D}{\partial x}(x,t) \\ \frac{\partial A}{\partial t}(x,t) & \frac{\partial B}{\partial t}(x,t) & \frac{\partial C}{\partial t}(x,t) & \frac{\partial D}{\partial t}(x,t) \end{bmatrix} = 1.$$

On voit facilement que la fibre de $M_1 \rightarrow P^1 \times P^1$ est de codimension 3 dans P^{4k+3} , sauf au-dessus de la diagonale. L'image réciproque de la diagonale est donc une composante irréductible de M_1 . Soit M'_1 la réunion des autres composantes: M'_1 est de dimension $4k+2$. La projection de M_1 dans P^{4k+3} est ainsi un sous-ensemble algébrique propre. On voit de même que la fibre de

$M_2 \rightarrow \mathbf{P}^1$ est de codimension 3 dans \mathbf{P}^{4k+3} ; donc M_2 est de dimension $4k+1$ et sa projection dans \mathbf{P}^{4k+3} est un sous ensemble algébrique propre de \mathbf{P}^{4k+3} .

Soit $U(k)$ le complémentaire de la réunion de ces deux projections. Alors $U(k)$ est un ouvert de Zariski non vide de \mathbf{P}^{4k+3} et ses éléments donnent un plongement de degré k de \mathbf{P}^1 dans \mathbf{P}^3 .

On peut alors prouver la proposition suivante:

PROPOSITION 43. *Soit k un entier ≥ 2 . Alors il existe dans $U(k)$ un ouvert de Zariski non vide dont les éléments sont des plongements de \mathbf{P}^1 dans \mathbf{P}^3 d'image une courbe générale.*

Pour $k \geq 6$, la démonstration se fait en comptant les constantes. On ne donne pas le détail des calculs.

On constate que la démonstration n'utilise $k > 5$ que lorsqu'on examine les quadrisécantes à la courbe. Ceci permet d'affirmer que la proposition 43 est en fait valable pour $k=5$. En effet, une courbe C de degré 5, rationnelle (donc pour laquelle $h=6$) est intersection partielle de deux surfaces cubiques S et S' , résiduelle à deux coniques [3, pp. 413 et 414]. Si une droite coupait C en quatre points distincts, elle serait située à la fois sur S et S' pour des raisons de degré. C'est impossible génériquement, les deux coniques résiduelles n'étant pas dégénérées.

Enfin, les possibilités $2 \leq k \leq 4$ ont été examinées au paragraphe A), comme courbes de bidegré (p, q) situées sur une quadrique.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Grauert und R. Remmert, *Bilder und Urbilder analytischer Garben*, Ann. of Math. 68 (1958), 393–443.
2. A. Grothendieck, *Les schémas de Hilbert*, Séminaire Bourbaki, 1960/61 exposé 221.
3. G. Halphen, *Oeuvres complètes*, tome III, Gauthier-Villars, Paris, 1921.
4. P. Le Barz, *Géométrie énumérative pour les multi-sécantes*, Colloque sur les variétés compactes, Lecture Notes in Mathematics 683, 116–167, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1978.
5. J. Mather, *Stable map-germs and algebraic geometry*, Lecture Notes in Mathematics 197, 176–193, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1970.
6. J. Mather, *Stability of C^∞ mappings IV*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 37 (1969), 223–248.
7. R. Remmert, *Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume*, Math. Ann. 133 (1957), 328–370.
8. J. Roberts, *Singularity subschemes and generic projections*, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 706–708.

9. J. G. Semple and L. Roth, *Introduction to algebraic geometry*, Clarendon Press, Oxford, 1949.
10. J. C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables* (Ergebnisse Math. 71) Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1972.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
IMSP
06034 NICE CÉDEX
FRANCE