MATH. SCAND. 35 (1974), 175–192

MULTIPLICATEURS SUR CERTAINS GROUPES TOTALEMENT DISCONTINUS. APPLICATIONS

JACQUES PEYRIÈRE

Ceci est la rédaction avec quelques additions d'une note (C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A 270 (1970), 992–994). Dans la première partie on généralise à certains groupes abéliens localement compacts métrisables et totalement discontinus les théorèmes que Paley [8] a établis pour le groupe $(\mathsf{Z}/2\mathsf{Z})^{\mathsf{N}}$. Dans le second chapitre on construit des multiplicateurs de $\mathscr{F}(L^p)$ pour certains groupes discrets, en particulier pour Z; cette construction se fait en considérant pour ces groupes des compactifications convenables auxquelles on peut appliquer certains résultats de la première partie. Enfin dans le dernier chapitre on étudie quelques propriétés de convergence ponctuelle des séries de Fourier.

1. Multiplicateurs sur certains groupes totalement discontinus.

1.1. G et Γ désignent deux groupes abéliens localement compacts duaux; $\mathscr{F}$ désigne la transformation de Fourier de $L^2(G)$ dans $L^2(\Gamma)$.

Si E est un ensemble mesurable de Γ et si $f \in L^2(G)$, on pose $f_E = \mathscr{F}^{-1}(\chi_E \cdot \mathscr{F}f)$. Si E a une mesure finie, on pose $K_E = \mathscr{F}^{-1}(\chi_E)$, c'est une fonction continue.

1.2. *Une classe de groupes totalement discontinus.*

A est un intervalle de Z contenant 0; $A' = A \cap (A-1)$.

G est un groupe abélien localement compact muni d'une suite strictement décroissante $(G_n)_{n\in A}$ de sous groupes ouverts compacts telle que

1° $\bigcup_{n\in A} G_n = G, \quad \bigcap_{n\in A} G_n = \{0\}$,

2° $k(G) = \sup_{n\in A'} (G_{n+1} : G_n) < \infty$.

G est totalement discontinu. On choisit sur G la mesure de Haar telle que $m(G_0) = 1$; on pose, pour $n \in A$, $i_n = (m(G_n))^{-1}$ et pour $n \in A'$, $k_n = (G_{n+1} : G_n)$ de sorte que l'on a $i_{n+1} = k_n i_n$.

Γ est le dual de G, Γ_n l'orthogonal de G_n. Les sous groupes Γ_n sont ouverts et compacts, l'indice de Γ_n dans Γ_{n+1} est k_n.

Reçu Avril 10, 1974.

On choisit sur Γ la mesure de Haar telle que $m(\Gamma_0)=1$, alors $m(\Gamma_n)=i_n$. Si $x \in G$ et si $x \neq 0$, $x \in G_n \setminus G_{n+1}$ pour un $n \in A'$, on pose alors $|x|=i_n{}^{-1}$; on pose $|0|=0$. La fonction $(x,y) \mapsto |x-y|$ est une distance ultramétrique sur G définissant sa topologie.

On définit de même une distance sur Γ.

1.3. *Intégrales singulières.*

$\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont deux espaces de Hilbert séparables; $\mathscr{B}(\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2)$ désigne l'espace de Banach des applications linéaires continues de $\mathscr{H}_1$ dans $\mathscr{H}_2$.

Une application $K: G \to \mathscr{B}(\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2)$ est dite mesurable si, pour tout $(h_1,h_2) \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$, l'application $x \mapsto (K(x)h_1,h_2)$ est mesurable; la convolution $K*f$, où f est une fonction mesurable de G dans $\mathscr{H}_1$, est definie lorsque cela est possible au sens faible. On a le théorème suivant.

1.4. THÉORÈME. *Soit K une application mesurable de G dans $\mathscr{B}(\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2)$ telle que $K*f$ soit défini pour un ensemble de fonctions, $\mathscr{S}$, dense dans tous les espaces $L^p(G,\mathscr{H}_1)$, $1 \leqq p < \infty$.*

On suppose en outre que

1° *Pour tout $f \in \mathscr{S}$, $\|K*f\|_{L^2(G,\mathscr{H}_2)} \leqq A_2\|f\|_{L^2(G,\mathscr{H}_1)}$,*

2° $\sup_{n\in A}\sup_{y\in G_n} \int_{\complement G_n} \|K(x-y)-K(x)\|_{\mathscr{B}}dx = A_1 < \infty.$

Alors, pour tout $p \in]1,\infty[$, il existe une constante $A_p > 0$, telle que, pour tout $f \in \mathscr{S}$,

$$\|K*f\|_{L^p(G,\mathscr{H}_2)} \leqq A_p\|f\|_{L^p(G,\mathscr{H}_1)},$$

A_p ne dépend que de p, A_2, A_1 et $k(G)$.

De plus si p et p' sont conjugués $A_p = A_{p'}$ et $A_p = O((p-1)^{-1})$ lorque p tend vers 1.

Ce théorème est la version pour les groupes totalement discontinus d'un théorème de Calderon et Zygmund [2], sa démonstration se trouve dans l'article de Rivière [10].

Dans la suite, A_p désignera une constante telle que $A_p = O(p^2(p-1)^{-1})$ quand p tend vers 1 ou l'infini.

1.5. LEMME. *Soit $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré, μ étant une mesure positive. Soit $(P_n)_{n\geqq 0}$ une famille de projecteurs de $L^2(\mu)$ deux à deux orthogonaux; soit H l'adhérence dans $L^2(\mu)$ de la somme de leurs images.*

On suppose que, pour tout $p \in]1,\infty[$, il existe $C_p > 0$ tel que pour tout $f \in L^2(\mu) \cap L^p(\mu)$ on ait

$$\|(\textstyle\sum_{n\geqq 0} |P_nf|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(\mu)} \leqq C_p\|f\|_{L^p(\mu)}.$$

Alors, pour tout $p \in]1,\infty[$, *pour tout* $f \in L^p(\mu) \cap H$, *on a*

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \leqq C_{p'} \|(\textstyle\sum_{n \geqq 0} |P_n f|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(\mu)} \quad \text{où } 1/p + 1p' = 1 .$$

Soit en effet P l'application de $L^2(\mu)$ dans $L^2(\mu, l^2)$ définie par $Pf = (P_n f)_{n \geqq 0}$; il résulte de l'orthogonalité des projecteurs P_n que la norme de P est 1.

Un calcul facile montre que si $g = (g_n)_{n \geqq 0} \in L^2(\mu, l^2)$ on a $P^* g = \sum_{n \geqq 0} P_n g_n$, cette dernière série convergeant dans $L^2(\mu)$.

L'hypothèse faite signifie que P se prolonge en une application linéaire continue de $L^p(\mu)$ dans $L^p(\mu, l^2)$ de norme inférieure à A_p. Par conséquent si $g \in L^2(\mu, l^2) \cap L^p(\mu, l^2)$ on a

$$\|P^* g\|_{L^p(\mu)} \leqq A_{p'} \|g\|_{L^p(\mu, l^2)} .$$

Si $f \in H \cap L^p(\mu)$ on a $f = \sum_{n \geqq 0} P_n f$ dans $L^2(\mu)$. Prenons $g = Pf$ alors

$$P^* g = \textstyle\sum_{n \geqq 0} P_n f = f$$

d'où le résultat.

1.6. Définition. $\mathscr{E}_0(\Gamma)$ est l'ensemble des parties E de Γ telles que

$$E = \bigcup_{m \in A'} \bigcup_{1 \leqq j \leqq \lambda(m)} C_{m,j}$$

où

1° $0 \leqq \lambda(m) \leqq k_m$ et $\inf\{n\ ;\ \text{pour tout } m \geqq n,\ \lambda(m) = 0\} < \infty$,

2° $C_{m,j}$ est une classe de Γ_m dans Γ_{m+1},

3° Les classes $C_{m,j}$ figurant effectivement dans la réunion sont deux à deux disjointes.

Ces ensembles sont des ouverts relativement compacts, leur frontière a au plus un élément. La décomposition précédente d'un tel ensemble peut n'être pas unique lorsque $\inf A = -\infty$. Il est commode d'écrire

$$C_{m,j} = \xi_{m,j} + \Gamma_m, \quad \xi_{m,j} \in \Gamma_{m+1} .$$

1.7. On a $K_E = \sum_{m \in A'} \sum_{1 \leqq j \leqq \lambda(m)} i_m \xi_{m,j} \chi_{G_m}$.

1.8. Lemme. *Si* $E \in \mathscr{E}_0(\Gamma)$ *et* $n \in A$ *les relations* $y \in G_n$ *et* $x \notin G_n$ *entraînent* $K_E(x-y) - K_E(x) = 0$.

En effet chacun des termes de la décomposition 1.7. a cette propriété.

1.9. Lemme. *Soit* $(E_n)_{n \geqq 0}$ *une suite (éventuellement finie) d'éléments deux à deux disjoints de* $\mathscr{E}_0(\Gamma)$. *Alors, pour tout* $x \neq 0$ *de* G, $\sum_{n \geqq 0} |K_{E_n}(x)|^2 < \infty$.

Si G est discret on a aussi $\sum_{n\geq 0}|K_{E_n}(0)|^2<\infty$.

Soit en effet

$$E_n = \bigcup_{m\in A'} \bigcup_{1\leq j\leq \lambda_n(m)} (\xi_{n,m,j}+\Gamma_m)\,.$$

Les E_n étant deux à deux disjoints on a nécessairement $\sum_{n\geq 0}\lambda_n(m)\leq k_m$ pour tout $m\in A'$. Soit x_0 non nul dans G: $x_0\in G_{m_0}\setminus G_{m_0+1}$ pour un $m_0\in A'$

$$K_{E_n}(x_0) = \sum_{\substack{m\in A'\\ m\leq m_0}} \sum_{1\leq j\leq \lambda_n(m)} i_m\,\xi_{n,m,j}(x_0)\,,$$

d'où

$$|K_{E_n}(x_0)|^2 \leq \sum_{\substack{m_1\in A'\\ m_1\leq m_0}} \sum_{\substack{m_2\in A'\\ m_2\leq m_0}} i_{m_1}i_{m_2}\lambda_n(m_1)\lambda_n(m_2)$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} |K_{E_n}(x_0)|^2 &\leq \sum_{m_1}\sum_{m_2} i_{m_1}i_{m_2}\sum_{n\geq 0}\lambda_n(m_1)\lambda_n(m_2)\\ &\leq \sum_{m_1}\sum_{m_2} i_{m_1}i_{m_2}k_{m_1}k_{m_2}\\ &\leq \Big(\sum_{\substack{m\in A'\\ m\leq m_0}} i_{m+1}\Big)^2 \leq 4i^2_{m_0+1}\,.\end{aligned}$$

Si G est discret Γ est compact et $\sum_{n\geq 0}m(E_n)\leq m(\Gamma)$, donc $\sum_{n\geq 0}|K_{E_n}(0)|\leq m(\Gamma)$, par suite $\sum_{n\geq 0}|K_{E_n}(0)|^2\leq (m(\Gamma))^2$.

1.10. PROPOSITION. *Soit $(E_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathscr{E}_0(\Gamma)$. On a, pour tout $p\in\,]1,\infty[$, et pour tout $f\in L^2(G)$,*

$$\|(\textstyle\sum_{n\geq 0} |f_{E_n}|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)} \leq A_p\,\|f\|_{L^p(G)}\,.$$

D'après le lemme précédent, pour presque tout x dans G, $(K_{E_n}(x))_{n\geq 0}$ appartient à l^2. Prenons $\mathscr{H}_1=\mathbf{C}$, $\mathscr{H}_2=l^2$, $K(x)=(K_{E_n}(x))$ définit une application mesurable de G dans $\mathscr{B}(\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2)$.

Si $f\in L^2(G)$, $K*f=(f_{E_n})_{n\geq 0}$ et l'on a

$$\begin{aligned}\|K*f\|^2_{L^2(G,l^2)} &= \sum_{n\geq 0} \|f_{E_n}\|^2_{L^2(G)}\\ &= \sum_{n\geq 0}\int_{E_n}|\hat f(\xi)|^2\,d\xi \leq \|\hat f\|^2_{L^2(\Gamma)} = \|f\|^2_{L^2(G)}\,.\end{aligned}$$

D'autre part $y\in G_n$ et $x\notin G_n$ entraîne $K(x-y)-K(x)=0$ et l'on conclut en appliquant le théorème 1.4.

1.11. COROLLAIRE. *Soit $(E_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathscr{E}_0(\Gamma)$ telle que $m(\Gamma\setminus\bigcup_{n\geq 0}E_n)=0$.*

Alors, pour tout $p\in\,]1,\infty[$, pour tout $f\in L^2(G)$, on a

$$A_p^{-1}\|f\|_{L^p(G)} \leq \|(\textstyle\sum_{n\geq 0} |f_{E_n}|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)} \leq A_p\|f\|_{L^p(G)}\,.$$

Cela résulte de 1.5 et 1.10; en effet les projecteurs $f\to f_{E_n}$ de $L^2(G)$

sont mutuellement orthogonaux et la somme de leurs images engendre $L^2(G)$.

1.12. Définition. $\mathscr{E}(\Gamma)$ désigne l'ensemble des translatés des éléments de $\mathscr{E}_0(\Gamma)$. Les éléments E de $\mathscr{E}(\Gamma)$ sont ceux qui se décomposent ainsi

$$E = \bigcup_{m\in A'} \bigcup_{1\leq j\leq\lambda(m)} C_{m,j}$$

où

1° $0 \leqq \lambda(m) \leqq k_m$ et $\inf\{n;$ pour tout $m \geqq n,\ \lambda(m)=0\} < \infty$,

2° $C_{m,j}$ est une classe modulo Γ_m et, pour tout $m_0 \in A'$,

$$\bigcup_{\substack{m\in A'\\ m\leqq m_0}} \bigcup_{1\leqq j\leqq\lambda(m)} C_{m,j}$$

est contenu dans une classe modulo Γ_{m_0+1},

3° les classes $C_{m,j}$ qui figurent effectivement dans la décomposition sont deux à deux disjointes.

1.13. Lemme. *Soit* $E \in \mathscr{E}(\Gamma)$.
Si $x \in G_n \setminus G_{n+1}$, $|K_E(x)| \leqq 2i_{n+1}$, *si* G *est discret* $|K_E(0)| \leqq m(\Gamma)$.

C'est un cas particulier du lemme 1.9.

1.14. Théorème. *Pour tout* $p \in]1,\infty[$, *pour tout suite* $(E_n,f_n)_{n\geqq 0}$ *de* $\mathscr{E}(\Gamma)\times L^2(G)$ *on a*

$$\|(\textstyle\sum_{n\geqq 0} |f_n * K_{E_n}|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)} \leqq A_p \|(\textstyle\sum_{n\geqq 0} |f_n|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)}\,.$$

On a $E_n = E_n' + \xi_n$, $E_n' \in \mathscr{E}_0(\Gamma)$. Le lemme 1.13. assure que pour presque tout x de G il y a un seul opérateur continu, $K(x)$, de l^2 tel que $K(x)(e_n) = K_{E_n'}(x)e_n$ où $(e_n)_{n\geqq 0}$ désigne la base orthonormale canonique de l^2.

L'application $x \to K(x)$ est manifestement mesurable et, d'après le lemme 1.8., si $y \in G_m$ et $x \notin G_m$ on a $K(x-y)-K(x)=0$.

D'autre part, si $g=(g_n)_{n\geqq 0} \in L^2(G,l^2)$ on a

$$K * g(x) = (K_{E_n'} * g_n(x))_{n\geqq 0}$$

et aussi

$$\|K*g\|^2_{L^2(G,l^2)} = \textstyle\sum_{n\geqq 0} \|K_{E_n'} * g_n\|^2_{L^2(G)} \leqq \sum_{n\geqq 0} \|g_n\|^2_{L^2(G)} = \|g\|^2_{L^2(G,l^2)}\,.$$

On peut donc appliquer le théorème 1.4.

$$\|(\textstyle\sum_{n\geqq 0} |K_{E_n'} * g_n|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)} \leqq A_p \|(\textstyle\sum_{n\geqq 0} |g_n|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)}\,.$$

et l'on obtient le résultat en prenant $g_n = \bar{\xi}_n \cdot f_n$. En effet

$$K_{E_n'} * g_n = \bar{\xi}_n \cdot K_{E_n} * f_n .$$

1.15. *Ordres sur Γ.*

On considère le sous groupe $\tilde{\Gamma}$ de $\prod_{n \in A'} (\mathsf{Z}/k_n \mathsf{Z})$ constitué des suites dont au plus un nombre fini de termes d'indices positifs sont nuls; soit $\tilde{\Gamma}_n$ le sous groupe de $\tilde{\Gamma}$ constitué des suites $(\omega_n)_{n \in A'}$ telles que, pour tout $m \geqq n$, $\omega_m = 0$; on munit $\tilde{\Gamma}$ de la distance associée à la suite $(\tilde{\Gamma}_n)_{n \in A}$, $\tilde{\Gamma}_n$ est ouvert compact.

Identifions $\mathsf{Z}/k_n \mathsf{Z}$ à l'ensemble ordonné $\{0, 1, \ldots, k_n - 1\}$, considérons sur $\tilde{\Gamma}$ l'ordre dont la restriction à chaque $\tilde{\Gamma}_n$ est l'ordre lexicographique. Soit $\Phi(\Gamma)$ l'ensemble des isométries de Γ sur $\tilde{\Gamma}$. Soit $\mathcal{O}(\Gamma)$ l'ensemble des ordres sur Γ obtenus à partir de l'ordre de $\tilde{\Gamma}$ par transport sur Γ au moyen des éléments de $\Phi(\Gamma)$.

1.16. Proposition. *Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{O}(\Gamma)$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$ l'ensemble*

$$\{\xi \in \Gamma \,;\ \xi \varepsilon \gamma \text{ et } \xi \neq \gamma\}$$

appartient à $\mathcal{E}(\Gamma)$.

D'après la caractérisation des éléments de $\mathcal{E}$ donnée en 1.12. toute isométrie de Γ sur $\tilde{\Gamma}$ transporte $\mathcal{E}(\Gamma)$ sur $\mathcal{E}(\tilde{\Gamma})$; il suffit donc de remarquer que la proposition est vraie pour l'ordre de $\tilde{\Gamma}$.

Soit h l'application de $\tilde{\Gamma}$ dans R^+ définie ainsi:

$$h((\omega_n)) = \sum_{n \in A'} \omega_n i_n$$

l'application h est croissante.

1.17. Théorème. *Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathsf{Z}}$ une suite croissante lacunaire à la Hadamard de nombres > 0. Soit $\varphi \in \Phi(\Gamma)$, notons*

$$E_n = (h \circ \varphi)^{-1}([\lambda_n, \lambda_{n+1}[), \quad E_{-\infty} = (h \circ \varphi)^{-1}(\{0\}) .$$

Alors, pour tout $p \in]1, \infty[$, pour tout $f \in L^2(G)$, on a

$$C_p^{-1} \|f\|_{L^p(G)} \leqq \|(\textstyle\sum_{-\infty \leqq n < \infty} |f_{E_n}|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(G)} \leqq C_p \|f\|_{L^p(G)}$$

où $C_p \leqq A p^4 (p-1)^{-2}$.

Ce théorème est vrai dans le cas où la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathsf{Z}}$ est un prolongement à Z d'une sous-suite de la suite $(i_n)_{n \in A}$; en effet, les ensembles

$\{E_n-(h\circ\varphi)^{-1}(0)\}_{-\infty\leqq n<\infty}$ satisfont alors les hypothèses de la proposition 1.11.

En vertu de 1.5. il suffit de démontrer l'inégalité de droite.

Supposons que $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geqq \delta > 1$ et soit $K=[\mathrm{Log}\, k/\mathrm{Log}\, \delta]$. Prolongeons si besoin est la suite $(i_n)_{n\in A}$ à Z en une suite encore notée i_n telle que $2 \leqq i_{n+1}/i_n \leqq k$. Chaque intervalle $[i_n, i_{n+1}[$ contient au plus K intervalles $[\lambda_m, \lambda_{m+1}[$; il existe donc une partition de Z: $\mathsf{Z}=\bigcup_{j=0}^K A_j$ telle que

1° si $n \in A_0$ l'intervalle $]\lambda_n, \lambda_{n+1}[$ contient au moins un i_m,

2° si $K>0$ et si m et n sont deux éléments distincts d'un même A_j $(1 \leqq j \leqq K)$ les deux intervalles $[\lambda_m, \lambda_{m+1}[$ et $[\lambda_n, \lambda_{n+1}[$ sont contenus dans deux intervalles $[i_{m'}, i_{m'+1}[$ et $[i_{n'}, i_{n'+1}[$ distincts.

Si $x \in \mathsf{R}^+$, notons

$$S_x f = f_{(h\circ\varphi)^{-1}([0,x[)}\,.$$

Posons

$$f_n^* = f_{(h\circ\varphi)^{-1}([i_n, i_{n+1}[)}\,;$$

en vertu de la remarque du début nous avons

$$\|(\textstyle\sum_{n\in\mathsf{Z}} |f_n^*|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)} \leqq A_p \|f\|_{L^p(G)}\,.$$

Soit $j \in \{1,2,\ldots,K\}$; si $n \in A_j$, $\sigma(n)$ est l'entier tel que $[\lambda_n, \lambda_{n+1}[\subset [i_{\sigma(n)}, i_{\sigma(n)+1}[$. On a alors

$$\begin{aligned} f_{E_n} &= S_{\lambda_{n+1}}(f) - S_{i_{\sigma(n)}}(f) - (S_{\lambda_n}(f) - S_{i_{\sigma(n)}}(f)) \\ &= S_{\lambda_{n+1}}(f^*_{\sigma(n)}) - S_{\lambda_n}(f^*_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

et

$$(\textstyle\sum_{n\in A_j} |f_{E_n}|^2)^{\frac12} \leqq (\sum_{n\in A_j} |S_{\lambda_{n+1}}(f^*_{\sigma(n)})|^2)^{\frac12} + (\sum_{n\in A_j} |S_{\lambda_n} f^*_{\sigma(n)}|^2)^{\frac12}$$

donc, en vertu de 1.14. et 1.16.

$$\|(\textstyle\sum_{n\in A_j} |f_{E_n}|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)} \leqq 2A_p \|(\sum_{n\in A_j} |f^*_{\sigma(n)}|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)} \leqq 2A_p^2 \|f\|_{L^p(G)}\,.$$

Etudions maintenant le cas où $j=0$. Si $n \in A_0$, $\sigma(n)$ et $\tau(n)$ sont les deux entiers tels que

$$i_{\sigma(n)} \leqq \lambda_n < i_{\sigma(n)+1}, \quad i_{\tau(n)} \leqq \lambda_{n+1} < i_{\tau(n)+1}\,.$$

On a

$$f_{E_n} = S_{\lambda_{n+1}}(f) - S_{i_{\tau(n)}}(f) + (S_{i_{\tau(n)}}(f) - S_{i_{\sigma(n)}}(f)) - (S_{\lambda_n}(f) - S_{i_{\sigma(n)}}(f))$$

et l'on opère comme précédemment. On obtient

$$\|(\textstyle\sum_{n\in A_0} |f_{E_n}|^2 + |f_{E_{-\infty}}|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)} \leqq 3A_p^2 \|f\|_{L^p(G)}$$

En définitive

$$\|(\textstyle\sum_{+\infty\leqq n<\infty} |f_{E_n}|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)} \leqq (2K+3)A_p^2 \|f\|_{L^p(G)}\,.$$

Cet énoncé généralise un théorème de Paley [8]. Les cas où $\lambda_n = i_n$ se trouve dans [9].

1.18. LEMME. *Soient* $(m_{j,n})_{j=1,2,\ldots,\lambda;\, n\geqq 0}$ λ *suites de fonctions de* $L^\infty(\Gamma)$ *telles que*:

1° *pour chaque* j, $m_{j,n}$ *converge vers* m_j *pour la topologie* $\sigma(L^\infty, L^1)$,

2° *pour un* $p \in]1,\infty[$, *il existe* $B > 0$ *tel que pour tout* n *et pour toutes fonctions* $f_j \in L^2(G)$, $j = 1,2,\ldots,\lambda$ *on ait*

$$\|(\textstyle\sum_{j=1}^{\lambda} |\mathscr{F}^{-1}(m_{j,n}\mathscr{F}f_j)|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)} \leqq B\|(\textstyle\sum_{j=1}^{\lambda} |f_j|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)} .$$

Alors, dans les mêmes conditions

$$\|(\textstyle\sum_{j=1}^{\lambda} |\mathscr{F}^{-1}(m_j\mathscr{F}f_j)|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)} \leqq B\|(\textstyle\sum_{j=1}^{\lambda} |f_j|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)} .$$

C'est une version vectorielle d'un lemme de De Leeuw [6].

Soient $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ deux espaces de Hilbert séparables, une condition nécessaire et suffisante pour que $m: \Gamma \to B(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ soit un multiplicateur de $\mathscr{F}(L^p(G, \mathscr{H}_1))$ dans $\mathscr{F}(L^p(G, \mathscr{H}_2))$ est que, pour toute $f \in L^p \cap L^2(G, \mathscr{H}_1)$ et pour toute $g \in L^{p'} \cap L^2(G, \mathscr{H}_2)$, $(1/p + 1/p' = 1)$, on ait:

$$|\textstyle\int_\Gamma \langle m(\gamma)\cdot \hat{f}(\gamma), \hat{g}(\gamma)\rangle_{\mathscr{H}_2} d\gamma| \leqq B\|f\|_{L^p(G,\mathscr{H}_1)}\|g\|_{L^{p'}(G,\mathscr{H}_2)} .$$

La démonstration est identique à celle du cas des multiplicateurs scalaires.

Ici nous prenons $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2 = \mathbf{C}^\lambda$ et $m_n(x) = (m_{j,n}(x))_{j=1,2,\ldots,\lambda}$. L'hypothèse 2° implique

$$|\textstyle\sum_{j=1}^{\lambda} \int_\Gamma m_{j,n}(\gamma)\hat{f}_j(\gamma)\hat{g}_j(\gamma)\, d\gamma| \leqq B\|f\|_{L^p(G,\mathbf{C}^\lambda)}\, \|g\|_{L^{p'}(G,\mathbf{C}^\lambda)}$$

pour toutes fonctions $f_j \in L^p \cap L^2(G)$ et $g_j \in L^{p'} \cap L^2(G)$.

L'hypothèse 1° permet de passer à la limite dans l'intégrale, en effet $\hat{f}_j \hat{g}_j \in L^1(\Gamma)$.

Ce lemme est valable pour tout groupe G abélien localement compact.

1.19. THÉORÈME. *Soit* $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ *une suite croissante lacunaire à la Hadamard de réels supérieurs à* 0.

Soit m *une fonction de* $\mathbf{R}^+$ *dans* $\mathbf{C}$ *telle que*

1° $\|m\|_\infty \leqq M$,

2° *la variation de* m *sur chaque intervalle* $[\lambda_n, \lambda_{n+1}[$ *est majorée par* M. *Alors pour tout* $\varphi \in \Phi(\Gamma)$, *pour tout* $p \in]1,2]$, $m \circ h \circ \varphi$ *est un multiplicateur de* $\mathscr{F}(L^p(G))$.

La démonstration est très proche de celle du théorème de Marcinkiewicz relatif aux multiplicateurs de $\mathscr{F}(L^p(T))$ [11, p. 232].

Etudions le cas où Γ n'est ni discret ni compact, les autres cas s'en déduisant facilement.

La mesure image par $h\circ\varphi$ de la mesure de Haar de Γ est la mesure de Lebesgue de R^+.

Introduisons les notations suivantes: soit ψ une section de $h\circ\varphi$

$$E_n = \psi([\lambda_n, \lambda_{n+1}[), \quad \Delta_n = f_{E_n}, \quad S_t(f) = f_{\psi([0,t[)},$$
$$\Delta_n{}' = \mathscr{F}^{-1}(m\circ h\circ\varphi\cdot\chi_{E_n}\cdot\mathscr{F}(f)) .$$

On a

$$S_t(f)(x) = \int_{[0,t[} (\psi(\tau), x)\hat{f}\circ\psi(\tau)\, d\tau$$
$$\Delta_n{}'(x) = \int_{[\lambda_n, \lambda_{n+1}[} m(\tau)\,(\psi(\tau), x)\hat{f}\circ\psi(\tau)\, d\tau .$$

Intégrant par parties, nous obtenons

$$\Delta_n{}'(x) = S_{\lambda_{n+1}}(\Delta_n)(x) m(\lambda_{n+1}-) - \int_{[\lambda_n, \lambda_{n+1}[} S_\tau(\Delta_n)(x)\, dm(\tau)$$

d'où, par application de l'inégalité de Schwarz et utilisation des hypothèses faites sur m,

$$|\Delta_n{}'(x)|^2 \leqq 2M\Big(M|S_{\lambda_{n+1}}(\Delta_n)(x)|^2 + \int_{[\lambda_n, \lambda_{n+1}[} |S_\tau(\Delta_n)(x)|^2\,|dm(\tau)|\Big),$$
$$\sum_{n\in\mathsf{Z}} |\Delta_n{}'(x)|^2 \leqq 2M\Big(\sum_{n\in\mathsf{Z}}\big(M|S_{\lambda_{n+1}}(\Delta_n)(x)|^2 + \int_{[\lambda_n, \lambda_{n+1}[} |S_\tau(\Delta_n)(x)|^2\,|dm(\tau)|\big)\Big).$$

Si la mesure dm est atomique on a, par application de 1.14

$$\|(\textstyle\sum_{n\in\mathsf{Z}} |\Delta_n{}'|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)} \leqq (2M)^{\frac12} A_p \|\big(\textstyle\sum_{n\in\mathsf{Z}} |\Delta_n|^2 (M + \int_{[\lambda_n, \lambda_{n+1}[} |dm(\tau)|)\big)^{\frac12}\|_{L^p(G)}$$

d'où

$$\|(\textstyle\sum_{n\in\mathsf{Z}} |\Delta_n{}'|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)} \leqq 2MA_p \|(\textstyle\sum_{n\in\mathsf{Z}} |\Delta_n|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)}$$

et l'on conclut par application de 1.17.

Dans le cas où la mesure dm n'est pas atomique, on approche m au sens $\sigma(L^\infty(\mathsf{R}^+), L^1(\mathsf{R}^+))$ par une suite m_j de fonctions de R^+ dans C de façon que chaque m_j vérifie les hypothèses 1° et 2° quitte à remplacer M par $2M$ et de façon que les mesures dm_j soient atomiques. Alors les fonctions $m_j\circ h\circ\varphi$ sont des multiplicateurs uniformément bornés de $\mathscr{F}L^p(G)$ convergeant vers $m\circ h\circ\varphi$ au sens $\sigma(L^\infty(\Gamma), L^1(\Gamma))$ ce qui prouve que $m\circ h\circ\varphi$ est un multiplicateur (Lemme 1.18.).

2. Applications a certains groupes compacts.

2.1. Soient G_1 et G_2 deux groupes abéliens localement compacts et j un homomorphisme continu de G_1 dans G_2; $\hat{\jmath}$ désigne l'homomorphisme dual de j; si $\mu \in M(G_1)$, $\check{j}(\mu)$ désigne la mesure image de μ par j. On sait que dans ces conditions $(\check{j}(\mu))^{\wedge} = \hat{\mu}\circ\hat{j}$.

2.2. LEMME. *Soit H un sous groupe fermé du groupe localement compact abélien G tel que G/H soit compact; on note π la surjection canonique de G sur G/H et l'on suppose qu'il existe une section borélienne s de π; on note s^* l'application de C^H dans C^G définie par $s^*(\alpha)\ (x) = \alpha(x - s\circ\pi(x))$. Alors*

1° *Pour tout n entier $\geqq 1$, pour toute application ψ de C^n dans C on a $\psi\circ s^{*n} = s^*\circ\psi$.*

2° *Si α est mesurable $s^*(\alpha)$ l'est aussi. Si de plus on choisit les mesures de Haar m_G, m_H, $m_{G/H}$ de façon compatible on a, pour tout $p > 0$,*

$$\|s^*(\alpha)\|_{L^p(G)} = (m_{G/H}(G/H))^{1/p}\,\|\alpha\|_{L^p(H)}\,.$$

PREUVE. 1° est évident modulo l'abus de notations suivant: ψ désigne aussi l'application de $(\mathsf{C}^H)^n$ dans C^H définie par $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to \psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

2°.

$$\int_G |s^*(\alpha)(x)|^p\, dx = \int_G |\alpha(x - s\circ\pi(x))|^p\, dx\,,$$

$$\int_G |s^*(\alpha)(x)|^p\, dx = \int_{G/H} dm_{G/H}(u) \int_H |\alpha(x+h - s\circ\pi(x+h))|^p\, dm_H(h)$$

où $u = \pi(x)$. Remarquons que $\pi(h) = 0$ et que $x - s\circ\pi(x) \in H$

$$\int_G |s^*(\alpha)(x)|^p\, dx = m_{G/H}(G/H) \int_H |\alpha(h)|^p\, dh\,.$$

2.3. LEMME. *Les hypothèses sont celles du lemme précédent; i désigne l'injection canonique de H dans G. Pour toute mesure $\mu \in M(H)$, pour toute fonction α continue bornée sur H, on a:*

$$s^*(\alpha *_H \mu) = s^*(\alpha) *_G \check{i}(\mu)\,.$$

En effet

$$s^*(\alpha) * \check{i}(\mu)(x) = \int_H \alpha(x - t - s\circ\pi(x-t))\,d\mu(t) = \alpha*\mu(x - s\circ\pi(x))\,.$$

2.4. G et Γ sont deux groupes duaux satisfaisant les hypothèses 1.2; Γ est compact, c'est à dire $A = -\mathsf{N}$. On considère un groupe abélien discret denombrable $\tilde{\Gamma}$ (sans rapport avec le groupe du même nom déjà considéré) plongé de façon dense dans Γ; on note i l'injection de $\tilde{\Gamma}$ dans Γ et j l'injection d'image dense, duale de i, de G dans $\tilde{G}$ dual de $\tilde{\Gamma}$.

Soit $\tilde{G}_n = j(G_n)$. $\tilde{G}$ est compact métrisable. On suppose que, pour chaque $n \leqq 0$, il existe une section borélienne σ_n de la surjection canonique de $\tilde{G}/\tilde{G}_n$ sur $(\tilde{G}/\tilde{G}_n)/(\tilde{G}_{n-1}/\tilde{G}_n)$ de sorte que, posant s_0 = identité de $\tilde{G}$ et $s_{n-1} = s_n\circ\sigma_n$ pour $n \leqq 0$, le diamètre de $s_n(\tilde{G}/\tilde{G}_n)$ tende vers 0 lorsque n

tend vers $-\infty$. s_n est une section borélienne de la surjection $\pi_n: \tilde{G} \to \tilde{G}/\tilde{G}_n$.

Soit $\mathscr{K}_n(G)$ l'ensemble des fonctions de G dans C à support dans G_n; on identifiera une fonction à support dans G_n à une fonction définie sur $\tilde{G}_n$.

Dans ces conditions, l'ensemble de fonction $\bigcup_{n\leq 0} s_n{}^*(\mathscr{K}_n(G))$ est dense dans tous les espaces $L^p(\tilde{G})$, $p \in [1,\infty[$. On suppose, en outre, que le fait suivant est vrai: si $m<n$

$$s_n{}^*(\mathscr{K}_n(G)) \subset s_m{}^*(\mathscr{K}_m(G)) .$$

2.5. Définitions.

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_0(\tilde{\Gamma}) &= \{i^{-1}(E)\ ;\ E \in \mathscr{E}_0(\Gamma)\} \\ \mathscr{E}(\tilde{\Gamma}) &= \{i^{-1}(E)\ ;\ E \in \mathscr{E}(\Gamma)\} \\ \mathscr{E}_1(\tilde{\Gamma}) &= \{i^{-1}(\bar{E})\ ;\ E \in \mathscr{E}(\Gamma)\} \cup \mathscr{E}(\tilde{\Gamma}) \end{aligned}$$

2.6. Proposition. *Pour tout* $p \in]1,\infty[$, *pour toute suite* $(f_n,\tilde{E}_n)_{n\geq 0}$ *de* $L^2(\tilde{G}) \times \mathscr{E}(\tilde{\Gamma})$ *on a*

$$\|(\textstyle\sum_{n\geq 0} |f_n * K_{\tilde{E}_n}|^2)^{\frac12}\|_{L^p(\tilde{G})} \leqq A_p \|(\textstyle\sum_{n\geq 0} |f_n|^2)^{\frac12}\|_{L^p(\tilde{G})} .$$

Il suffit de démontrer ce résultat pour une suite finie avec une constante indépendante du nombre de termes. D'après le lemme 1.18. il suffit de considérer le cas où $\tilde{E}_n = i^{-1}(E_n)$, E_n étant la réunion finie de classes de sous groupes de Γ.

Soit donc N le nombre de termes de la suite et Γ_M le plus petit sous groupe apparaissant dans la décomposition des E_n. Le support de K_{E_n} est dans G_M. Soit $f_n \in \bigcup_m s_m{}^*(\mathscr{K}_m(G))$, pour un $m \leqq M$

$$f_n = s_m{}^*(\alpha_n), \quad \alpha_n \in \mathscr{K}_m(G) .$$

D'après 2.1. et 2.3. nous avons

$$f_n * K_{\tilde{E}_n} = s_m{}^*(K_{E_n} * \alpha_n) .$$

D'après 2.2.

$$(\textstyle\sum_{n=1}^N |f_n * K_{\tilde{E}_n}|^2)^{\frac12} = s_m{}^*\big((\textstyle\sum_{n=1}^N |K_{E_n} * \alpha_n|^2)^{\frac12}\big) ,$$

$$\|(\textstyle\sum_{n=1}^N |f_n * K_{\tilde{E}_n}|^2)^{\frac12}\|_{L^p(\tilde{G})} = \big(m_{\tilde{G}/\tilde{G}_m}(\tilde{G}/\tilde{G}_m)\big)^{1/p} \|(\textstyle\sum_{n=1}^N |K_{E_n} * \alpha_n|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)}$$

or, en vertu de 1.14.

$$\|(\textstyle\sum_{n=1}^N |K_{E_n} * \alpha_n|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)} \leqq A_p \|(\textstyle\sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2)^{\frac12}\|_{L^p(G)}$$

et l'on conclut par une nouvelle application du lemme 2.2.

2.7. Corollaire. *L'énoncé précédent est vrai en remplaçant $\mathscr{E}(\tilde{\Gamma})$ par $\mathscr{E}_1(\tilde{\Gamma})$.*

En effet on obtient les éléments de $\mathscr{E}_1(\tilde{\Gamma})$ en ajoutant au plus un point à ceux de $\mathscr{E}(\tilde{\Gamma})$. On utilise aussi l'inégalité

$$(\textstyle\sum_{n\geqq 0} |\hat{f}_n(\xi_n)|^2)^{\frac{1}{2}} \leqq A_p \|\textstyle\sum_{n\geqq 0} |f_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(\tilde{G})} .$$

2.8. Proposition. *Si $f \in L^2(\tilde{G})$ posons $f_n = f_{\tilde{\Gamma}_n \setminus \tilde{\Gamma}_{n-1}}$ pour $n \leqq 0$.*
On a, pour tout $p \in]1,\infty[$, pour tout $f \in L^2(\tilde{G})$,

$$\|\textstyle\sum_{n\leqq 0} |f_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(\tilde{G})} \leqq A_p \|f\|_{L^p(\tilde{G})} .$$

Soit $f \in \bigcup_{m\leqq 0} s_m{}^*(\mathscr{K}_m(G))$, pour tout $m \leqq m_0$, $f = s_m{}^*(\alpha)$ où $\alpha \in \mathscr{K}_m(G)$. Soit μ_n la mesure sur G dont la transformée de Fourier est $\chi_{\Gamma_n \setminus \Gamma_{n-1}}$, son support est G_{n-1}; $f_n = f * \check{\jmath}(\mu_n)$; par conséquent, si $n > m$, $f_n = s_m{}^*(\alpha * \mu_n)$ en vertu de 2.3.
d'où

$$(\textstyle\sum_{m<n\leqq 0} |f_n|^2)^{\frac{1}{2}} = s_m{}^*((\textstyle\sum_{m<n\leqq 0} |\alpha * \mu_n|^2)^{\frac{1}{2}})$$

et l'on conclut en utilisant 1.10., 2.2. et le lemme de Fatou.

2.9. Corollaire. *Avec les notations précédentes, pour tout $f \in L^2(\tilde{G})$ telle que $\hat{f}(0) = 0$, on a*

$$A_p{}^{-1} \|f\|_{L^p(\tilde{G})} \leqq \|(\textstyle\sum_{n\leqq 0} |f_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(\tilde{G})} \leqq A_p \|f\|_{L^p(\tilde{G})} .$$

Cela résulte de 2.8 et 1.5.

R. Spector m'a communiqué une démonstration du fait suivant: $\sum_{n\leqq 0} \pm \chi_{\tilde{\Gamma}_n \setminus \tilde{\Gamma}_{n-1}}$ est un multiplicateur de $\mathscr{F}(L^p(\tilde{G}))$ pour tout $p \in]1,\infty[$. Cela résulte aussi des théorèmes très généraux de N. Lohoué [7] relatifs au transport des multiplicateurs. De là en utilisant la technique des fonctions de Rademacher on pourrait déduire les proposition 2.6 et 2.8. On a préféré une démonstration élémentaire qui fournit une meilleure évaluation des constantes.

2.10. Soit $\mathscr{O}(\tilde{\Gamma})$ les ordres de $\mathscr{O}(\Gamma)$ transportés sur $\tilde{\Gamma}$ au moyen de i. Il résulte de 1.16. que pour tout $\varepsilon \in \mathscr{O}(\tilde{\Gamma})$, pour tout $\gamma \in \tilde{\Gamma}$, les ensembles

$$\{\xi \in \tilde{\Gamma};\ \xi \varepsilon \gamma\} \quad \text{et} \quad \{\xi \in \tilde{\Gamma};\ \xi \varepsilon \gamma \text{ et } \xi \neq \gamma\}$$

appartiennent à $\mathscr{E}_1(\tilde{\Gamma})$.

2.11. Théorème. *Soit $(\lambda_n)_{n\leqq 0}$ une suite croissante lacunaire à la Hadamard de réels supérieurs à 0 telle que $\lambda_0 = 1$. Considérons une partition de*

$]0,1]$ ou $]0,1[$ par des ensembles de la forme $]\lambda_n,\lambda_{n+1}[$ ou $]\lambda_n,\lambda_{n+1}]$ ou $[\lambda_n,\lambda_{n+1}[$ ou $[\lambda_n,\lambda_{n+1}]$.

Soit $\varphi\in\Phi(\Gamma)$, soient $\tilde{E}_n$ les images réciproques par $h\circ\varphi\circ i$ de ces ensembles, $E_{-\infty}=(h\circ\varphi\circ i)^{-1}(\{0\})$ et éventuellement $E_1=(h\circ\varphi\circ i)^{-1}(\{1\})$. Alors, pour tout $p\in]1,\infty[$, il existe $C_p>0$ tel que, pour toute fonction $f\in L^2(G)$, on ait

$$C_p^{-1}\|f\|_{L^p(\tilde{G})} \leqq \|(\textstyle\sum_{-\infty\leqq n\leqq 1}|f_{\tilde{E}_n}|^2)^{\frac12}\|_{L^p(\tilde{G})} \leqq C_p\|f\|_{L^p(\tilde{G})}\,.$$

Compte tenu de 2.7. et 2.9. ceci se démontre de la même façon que 1.17.

2.12. Théorème. *Soit $(E_n)_{n>0}$ une partition de $\tilde{\Gamma}$ telle que, pour un $p\in]1,\infty[$, il existe B et $C>0$ tels que, pour tout $f\in L^2(\tilde{G})$,*

$$B^{-1}\|f\|_{L^p(\tilde{G})} \leqq \|(\textstyle\sum_{n\geqq 0}|f_{E_n}|^2)^{\frac12}\|_{L^p(\tilde{G})} \leqq C\|f\|_{L^p(\tilde{G})}\,.$$

Soit m une fonction de Γ dans $\mathbf{C}$ telle que

1° $\|m\|_\infty\leqq M$,

2° pour tout $n>0$, il existe $\varepsilon_n\in\mathcal{O}(\tilde{\Gamma})$ tel que la variation de $m|_{E_n}$ relativement à $\varepsilon_n|_{E_n}$ soit majorée par M.

Alors m est un multiplicateur de $\mathscr{F}L^p(\tilde{G})$ dont la norme est majorée par $2MBCA_p$.

Preuve. $A(\tilde{G})$ étant dense dans $L^p(\tilde{G})$ il suffit de montrer que, pour tout $f\in A(\tilde{G})$,

$$\|\mathscr{F}^{-1}(m\cdot\mathscr{F}f)\|_{L^p(\tilde{G})} \leqq 2MBCA_p\|f\|_{L^p(\tilde{G})}\,.$$

Posons $\Delta_n=f_{E_n}$, $\Delta_n'=\mathscr{F}^{-1}(m\cdot\Delta_n)$; à cause de l'hypothèse faite sur les E_n il suffit de montrer que

$$\|(\textstyle\sum_{n>0}|\Delta_n'|^2)^{\frac12}\|_{L^p(\tilde{G})} \leqq 2MA_p\|(\sum_{n>0}|\Delta_n|^2)^{\frac12}\|_{L^p(\tilde{G})}\,.$$

Il suffit de faire la démonstration dans le cas où m est à valeurs réelles.

Si $\varepsilon\in\mathcal{O}(\tilde{\Gamma})$ et $\xi\in\tilde{\Gamma}$ posons

$$s_{\varepsilon,\xi}(f) = \textstyle\sum_{\zeta\varepsilon\xi}\hat{f}(\zeta)\zeta, \quad s^-_{\varepsilon,\xi}(f) = s_{\varepsilon,\xi}(f)-\hat{f}(\xi)\cdot\xi\,.$$

On a

$$\Delta_n' = \textstyle\sum_{\xi\in E_n} m(\xi)f(\xi)\xi\,.$$

Pour alléger les notations la relation d'ordre ε sera notée $\leqq$.

Soit $\eta>0$, il existe pour chaque n une partie finie F_n de E_n telle que

$$\textstyle\sum_{\xi\in E_n\setminus F_n}|\hat{f}(\xi)| < \eta 2^{-n-1}\,.$$

On a manifestement

$$\|\Delta_n' - \textstyle\sum_{\xi\in F_n} m(\xi)\hat{f}(\xi)\xi\|_{L^\infty(\tilde{G})} < \eta M 2^{-n-1}\,.$$

Soit
$$F_n = \{\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \dots, \xi_{\lambda_n,n}\}, \quad \xi_{1,n} < \xi_{2,n} < \dots < \xi_{\lambda_n,n} .$$
Posons
$$s_j^{(n)} = \sum\nolimits_{1\leqq k\leqq j} \hat{f}(\xi_{k,n})\xi_{k,n}, \quad s_{j,n} = s_{\varepsilon,\xi_{j,n}}(\Delta_n)$$
si $j \geqq 1$, $s_0^{(n)} = s_{0,n} = 0$.

Alors
$$\sum\nolimits_{\xi\in F_n} m(\xi)\hat{f}(\xi)\xi = \sum\nolimits_{j=1}^{\lambda_n} (s_j^{(n)} - s_{j-1}^{(n)})m(\xi_{j,n}) .$$
Mais
$$\|s_j^{(n)} - s_{j-1}^{(n)} - (s_{j,n} - s_{j-1,n})\|_{L^\infty(\tilde{G})} \leqq \sum\nolimits_{\substack{\xi_{j-1,n}<\zeta<\xi_{j,n} \\ \zeta\in E_n}} |f(\zeta)|$$
d'où
$$\|\Delta_n' - \sum\nolimits_{j=1}^{\lambda_n} (s_{j,n} - s_{j-1,n})m(\xi_{j,n})\|_{L^\infty(\tilde{G})} \leqq 2M\eta 2^{-n}$$
et
$$\|\Delta_n' - \sum\nolimits_{j=1}^{\lambda_n-1} s_{j,n}\big(m(\xi_{j,n}) - m(\xi_{j+1,n})\big) - s_{\lambda_n,n}m(\xi_{\lambda_n,n})\|_{L^\infty(\tilde{G})} \leqq 2^{-n}M\eta .$$
En définitive, pour tout $\eta > 0$, on peut écrire:
$$\Delta_n' = \sum\nolimits_{\xi\in F_n} \alpha(\xi)s_{\varepsilon,\xi}(\Delta_n) + \psi_n$$
où
$$\sum\nolimits_{\xi\in F_n} |\alpha(\xi)| \leqq 2M \quad \text{et} \quad \|\psi_n\|_{L^\infty(\tilde{G})} \leqq 2M\eta 2^{-n-1} .$$
Alors, l'inégalité de Schwarz donne
$$|\Delta_n'|^2 \leqq \big(\sum\nolimits_{\xi\in F_n} |\alpha(\xi)| + M\eta 2^{-n}\big)\Big(\sum\nolimits_{\xi\in F_n} |s_{\varepsilon,\xi}\big(|\alpha(\xi)|^{\frac12}\Delta_n\big)|^2 + M\eta 2^{-n}\Big)$$
et
$$\sum\nolimits_{n<0} |\Delta_n'|^2 \leqq (2M + M\eta)\Big(\sum\nolimits_{n>0}\sum\nolimits_{\xi\in F_n} |s_{\varepsilon,\xi}\big(|\alpha(\xi)|^{\frac12}\Delta_n\big)|^2 + M\eta\Big) ,$$
$$\big(\sum\nolimits_{n>0} |\Delta_n'|^2\big)^{\frac12} \leqq M^{\frac12}(2+\eta)^{\frac12}\Big(\big(\sum\nolimits_{n>0}\sum\nolimits_{\xi\in F_n} |s_{\varepsilon,\xi}\big(|\alpha(\xi)|^{\frac12}\Delta_n\big)|^2\big)^{\frac12} + (M\eta)^{\frac12}\Big) .$$
D'où, en vertu de 2.6.
$$\|\sum\nolimits_{n>0} |\Delta_n'|^2)^{\frac12}\|_{L^p(\tilde{G})} \leqq (2M + M\eta)^{\frac12}\Big(\|\big(\sum\nolimits_{n>0}\sum\nolimits_{\xi\in F_n} |\alpha(\xi)||\Delta_n|^2\big)^{\frac12}\|_{L^p(\tilde{G})} + (2\eta)^{\frac12}\Big)$$
d'où
$$\|\big(\sum\nolimits_{n>0} |\Delta_n'|^2\big)^{\frac12}\|_{L^p(\tilde{G})} \leqq 2M\|\big(\sum\nolimits_{n>0} |\Delta_n|^2\big)^{\frac12}\|_{L^p(\tilde{G})} .$$

2.13. Exemples.

1°. Soient $\tilde{\Gamma}^i$, Γ^i des groupes vérifiant les hypothèses 2.4.; alors $\tilde{\Gamma}^1 \times \tilde{\Gamma}^2$ et $\Gamma^1 \times \Gamma^2$ satisfont aussi ces hypothèses; on peut prendre dans $\Gamma^1 \times \Gamma^2$ la suite de sous groupes:
$$\Gamma^1 \times \Gamma^2,\ \Gamma^1_{-1} \times \Gamma^2,\ \Gamma^1_{-1} \times \Gamma^2_{-1},\ \Gamma^1_{-2} \times \Gamma^2_{-1},\ \Gamma^1_{-2} \times \Gamma^2_{-2} ,$$
etc.

$\coprod_{i\in I} \tilde{\Gamma}^i$ et $\prod \Gamma^i$ satisfont aussi ces hypothèses à condition que $\sup_{i\in I} k(\Gamma^i) < \infty$; on prend la suite de sous groupes suivants

$$\prod \Gamma^j,\quad \Gamma^1{}_{-1}\times\prod_{j>1}\Gamma^j,\quad \Gamma^1{}_{-1}\times\Gamma^2{}_{-1}\times\prod_{j>2}\Gamma^j,\quad \Gamma^1{}_{-2}\times\Gamma^2{}_{-1}\times\prod_{j>2}\Gamma^j,$$
$$\Gamma^1{}_{-2}\times\Gamma^2{}_{-2}\times\prod_{j>2}\Gamma^j,\quad \Gamma^1{}_{-2}\times\Gamma^2{}_{-2}\times\Gamma^3{}_{-1}\times\prod_{j>3}\Gamma^j,$$
$$\Gamma^1{}_{-3}\times\Gamma^2{}_{-2}\times\Gamma^3{}_{-1}\times\prod_{j>3}\Gamma^j,\quad \text{etc.}$$

2°.Si $\boldsymbol{D}_n=\prod_1^\infty(\mathsf{Z}/n\mathsf{Z})$, $\hat{\boldsymbol{D}}_n$ est un sous groupe dense de $\boldsymbol{D}_n$ et les hypothèses 2.4. sont satisfaites.

3°. Soit Δ_a un groupe d'entiers a-adique (la définition de Δ_a se trouve dans [4, p. 108]) tel que $\sup a_{n+1}/a_n<\infty$. Z est un sous groupe dense de Δ_a; les hypothèses 2.4. sont satisfaites.

3. Convergence ponctuelle.

3.1. LEMME. *Soit $\mathscr{F}$ une famille de classes de fonctions mesurables supérieures ou égales à 0 sur l'espace mesuré $(X,\mathscr{A},\mu)$, $\mu\geqq 0$ σ-finie.*

Soit $\mathscr{F}_0$ une partie de $\mathscr{F}$ telle que tout élément de $\mathscr{F}$ soit approchable en mesure par une suite d'éléments de $\mathscr{F}_0$. Alors

$$\operatorname{ess\,sup}_{f\in\mathscr{F}}f = \operatorname{ess\,sup}_{f\in\mathscr{F}_0}f\,.$$

Par extraction de sous suites presque partout convergentes et appliquant le théorème d'Egoroff on voit que tout élément de $\mathscr{F}$ est approchable presque uniformément par des éléments de $\mathscr{F}_0$, c'est à dire $\forall f\in\mathscr{F}$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists A\in\mathscr{A}$, $\mu(A)<\varepsilon$, $\forall\eta>0$, $\exists g\in\mathscr{F}_0$, $|f-g|<\eta$ hors de A.

Soit $F=\operatorname{ess\,sup}_{f\in\mathscr{F}}f$; on sait que $F=\sup_{n\geqq1}f_n$.

Soit $\varepsilon>0$, il existe des ensembles $A_n\in\mathscr{A}$ tels que $\mu(A_n)\leqq\varepsilon\cdot2^{-n}$ et tels que pour tout $\eta>0$ il existe $g_n\in\mathscr{F}_0$ tels que $|f_n-g_n|<\eta$ hors de A_n. Donc

$$\sup_{n\geqq1}f_n \leqq \eta+\sup_{n\geqq1}g_n$$

pour tout η hors de l'ensemble $\cup A_n$ dont la mesure est inférieure ou égale à ε. On en déduit que

$$F \leqq \operatorname{ess\,sup}_{f\in\mathscr{F}_0}f \quad \text{presque partout}\,.$$

Soient G et Γ des groupes vérifiant les hypothèses 1.2. Il résulte des articles de Billard [1] et de Hunt et Taibleson [5] que le théorème de Carleson est vrai pour G compact.

3.2. THÉORÈME. *Si G est compact il existe $C>0$ ne dépendant que de $k(G)$ tel que pour tout $\varepsilon\in\mathscr{O}(\Gamma)$, pour toute $f\in L^2(G)$*

$$m(\{\sup_{\xi\in\Gamma}|s_{\varepsilon,\xi}(f)|>\lambda\}) \leqq C\lambda^{-2}\|f\|^2_{L^2(G)}\,.$$

3.3. Corollaire. *Le théorème précédent est valable pour tout groupe vérifiant les hypothèses* 1.2.

L'espace L^2 faible étant complet, il suffit de démontrer le résultat pour les fonctions à support compact.

Soit $f \in L^2(G)$ dont le support est dans G_{n_0}, sa transformée de Fourier est constante sur les classes de Γ_{n_0}.

Soit $\varepsilon \in \mathcal{O}(\Gamma)$, ε induit un ordre ε_n de $\mathcal{O}(\Gamma/\Gamma_n)$. Posons

$$s_\xi = s_{\varepsilon,\xi}, \quad s_\xi^{(n)} = s_{\varepsilon_n,\xi} \quad \text{si } \xi \in \Gamma/\Gamma_n .$$

On a la propriété suivante: $s_\xi^{(n)}(f)$ est, lorsque $n \leqq n_0$, une somme partielle de f pour l'ordre ε et toute somme $s_\xi f$ est approchable dans $L^2(G)$ (donc en mesure) par de telles sommes lorsque n tend vers $-\infty$.

Appliquons le théorème 3.2. à G_n

$$m(\sup_{\xi\in\Gamma/\Gamma_n} |s_\xi^{(n)}(f)| > \lambda) \leqq m(G_n) C\lambda^{-2} \|f\|^2_{L^2(G_n)} = C\lambda^{-2}\|f\|^2_{L^2(G)}$$

et l'on conclut par application du lemme 3.1.

Soient G, Γ, $\tilde{G}$, $\tilde{\Gamma}$ des groupes vérifiant les hypothèses 2.4.

3.4. Proposition. *L'énoncé précédent est valable pour* $\tilde{G}$.

Preuve. Il suffit de considérer $f \in \bigcup_{m\leq 0} s_m^*(\mathcal{K}_m(G))$. Soit $\varepsilon \in \mathcal{O}(\tilde{\Gamma})$; les ensembles

$$\{\xi \in \tilde{\Gamma}\,;\ \xi\varepsilon\zeta \text{ et } \xi \neq \zeta\}$$

sont des réunions de classes de groupes $\tilde{\Gamma}_n$. En vertu du lemme 3.1. il suffit de considérer parmi ces ensembles ceux qui sont réunions finies de telles classes.

Soit $\mathcal{U}_n$ $(n \leqq 0)$ l'ensemble des $\{\xi \in \tilde{\Gamma};\ \xi\varepsilon\zeta \text{ et } \xi \neq \zeta\}$ qui sont réunions de classes de sous groupes $\tilde{\Gamma}_m$ avec $m \geqq n$. Il suffit de démontrer que

$$m(\sup_{E\in\mathcal{U}_n} |f_E| > \lambda) \leqq C\lambda^{-2}\|f\|_{L^2(G)} .$$

Si $E \in \mathcal{U}_n$, $E = i^{-1}(F)$ où K_F a son support dans G_n. Pour tout $m \leqq m_0 \leqq n$, $f = s_m^*(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{K}_m(G)$, alors $f_E = s_m^*\ (\alpha * K_F)$ (lemme 2.2.) et d'après le même lemme

$$\sup_{E\in\mathcal{U}_n} |f_E| = s_m^*\ (\sup|\alpha * K_F|)$$

or

$$m_{\tilde{G}}(|s_m^*(\alpha)| > \lambda) = m_{\tilde{G}/\tilde{G}_m}(\tilde{G}/\tilde{G}_m)\ \mathrm{card}\,(|\alpha| > \lambda)$$

d'après 3.3.

$$\mathrm{card}\,(\sup|\alpha * K_F| > \lambda) \leqq C\lambda^{-2}\|\alpha\|^2_{L^2(G)}$$

et l'on termine en utilisant 2.2.

3.5. Proposition. *Supposons que l'on ait dans* $\tilde{\Gamma}$ *une suite* $(E_n)_{n\geq 0}$ *croissante de parties finies dont la réunion est* $\tilde{\Gamma}$ *telles qu'il existe* $A > 0$ *tel que pour tout* $f \in L^2(\tilde{G})$

$$m_{\tilde{G}}(\sup |f_{E_n}| > \lambda) \leqq A\lambda^{-2}\|f\|^2_{L^2(\tilde{G})} .$$

Alors il existe des bons ordres sur $\tilde{\Gamma}$ *tels que*

$$m_{\tilde{G}}(\sup_{\xi\in\tilde{\Gamma}} |f_{]\leftarrow \xi[}| > \lambda) \leqq B\lambda^{-2}\|f\|^2_{L^2(\tilde{G})} .$$

Par suite les sommes partielles suivant cet ordre de la série de Fourier d'une fonction de $L^2(\tilde{G})$ *convergent presque partout.*

On se donne une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{O}(\tilde{\Gamma})$. Construisons sur $\tilde{\Gamma}$ un ordre ($\leqq$) de la façon suivante

1° Si $\xi \in E_n$ et $\zeta \notin E_n$, $\xi < \zeta$,
2° Si ξ et ζ appartiennent à $E_{n+1}\setminus E_n$, $\xi \leqq \zeta \Leftrightarrow \xi\,\varepsilon_n\,\zeta$.

Cet ordre est un bon ordre sur $\tilde{\Gamma}$.

Soit

$$f_{n+1} = f_{E_{n+1}} \setminus E_n, \quad f_0 = f_{E_0} .$$

Alors

$$s_\xi(f) = f_{\{\zeta;\, \zeta<\xi\}} .$$

Si $\xi \in E_n \setminus E_{n-1}$, on a

$$s_\xi(f) = s_{\varepsilon_n,\xi}(f_n) + f_{E_n} ,$$

alors

$$\sup_{\xi\in\tilde{\Gamma}} |s_\xi(f)| \leqq \sup_n \sup_\xi |s_{\varepsilon_n,\xi}(f_n)| + \sup_n |f_{E_n}| .$$

D'après 3.4.

$$m(\sup_\xi |s_{\varepsilon_n,\xi}(f_n)| > \lambda) \leqq C\lambda^{-2}\|f_n\|^2_{L^2(\tilde{G})} ,$$

d'où

$$m(\sup_n \sup_\xi |s_{\varepsilon_n,\xi}(f_n)| > \lambda) \leqq C\lambda^{-2} \sum \|f_n\|^2_{L^2(\tilde{G})} = C\lambda^{-2}\|f\|^2_{L^2(\tilde{G})}$$

et

$$m(\sup_{\xi\in\tilde{\Gamma}} |s_\xi(f)| > \lambda) \leqq 4(A+C)\lambda^{-2}\|f\|^2_{L^2(\tilde{G})} .$$

3.6. Exemple. Prenons

$$\tilde{\Gamma} = \mathsf{Z}^2, \quad \Gamma = \Delta_a \times \Delta_b .$$

Fefferman [3] a montré que l'on peut prendre dans la proposition précédente pour E_n une suite de rectangles dépendant d'un paramètre; on a ainsi construit sur Z^2 des bons ordres tels que la série de Fourier d'une fonction $L^2(\mathsf{T}^2)$ sommée suivant ces ordres converge presque partout.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. Billard, *Sur la convergence presque partout des séries de Fourier–Walsh des fonctions de l'espace* $L^2(0,1)$, Studia Math. 28 (1967), 363–388.
2. A. P. Calderon and A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. 88 (1952), 85–139.
3. C. Fefferman, *On the convergence of multiple Fourier series*, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 744–745.
4. E. Hewitt and K. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I*, Grundlehren Math. Wissensch. 115, Springer-Verlag, Berlin, 1963.
5. R. A. Hunt and M. H. Taibleson, *Almost everywhere convergence of Fourier series on the ring of integers of a local field.* SIAM J. Math. Anal. 2 (1971), 607–625.
6. K. de Leeuw, *Sur les multiplicateurs de* $\mathscr{F}L^p$, Ann. of Math. 81 (1965), 364–379.
7. N. Lohoué, *Algèbres* $A_p(G)$ *et convoluteurs de* $L^p(G)$, Thèse, Orsay, 1972.
8. R. E. A. C. Paley, *A remarkable system of orthogonal functions*, Proc. London Math. Soc. 34 (1932), 241–271.
9. J. Peyrière and R. Spector, *Sur les multiplicateurs radiaux de* $\mathscr{F}L^p(G)$, *pour un groupe abélien localement compact totalement discontinu* C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 269 (1969), 973–974.
10. N. M. Rivière, *On singular integrals*, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 843–847.
11. A. Zygmund, *Trigonometric series* II, Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

UNIVERSITE DE PARIS - SUD, ORSAY, FRANCE