

RADIALPOTENZINTEGRALE  
ZENTRALSCHMETRISCHER ROTATIONSKÖRPER  
UND UNGLEICHHEITSAUSSAGEN  
BUSEMANN'SCHER ART

H. HADWIGER

**1. Erklärungen und Bezeichnung.**

Es bezeichne  $R$  den dreidimensionalen euklidischen Raum und  $S$  die Menge der Einheitsvektoren, die uns Richtungen in  $R$  kennzeichnen. Drei paarweise orthogonale Richtungen  $x, y, z \in S$ ,  $yz = zx = xy = 0$ , sollen zusammen mit einem fest gewählten Ursprung  $Z \in R$  ein cartesisches Koordinatensystem festlegen. Für  $u \in S$  bedeute  $H_u$  die von  $Z$  auslaufende Halbgerade der Richtung  $u$  und  $E_u$  sei die durch  $Z$  hindurchgehende Ebene der Normalenrichtung  $u$ . Es ist zweckmässig, bereits hier einige später verwendbare Bezeichnungen festzulegen. Es sei  $uz = \cos \varphi = \xi$  und  $\sin \varphi = \tau$  gesetzt. Wir werden Richtungen  $v$  von Halbgeraden  $H_v \subset E_u$  betrachten, die in einer festen Ebene  $E_u$  liegen, sodass die Nebenbedingung  $wv = 0$  erfüllt ist. Hier setzen wir  $vz = \cos \psi = \eta$ . Mit einem passend gewählten Umdrehwinkel  $\theta$  für  $H_v$  in  $E_u$  gilt die Beziehung  $\cos \psi = \sin \varphi \cos \theta$ .

Für die Formulierung unseres Satzes benötigen wir die Richtungsichte  $du = -2\pi d\xi$  und die relative Drehdichte  $d_u v = d\theta = -(\tau^2 - \eta^2)^{-\frac{1}{2}} d\eta$ , also die Umdrehdichte des Halbstrahls  $H_v$  in der festen Ebene  $E_u$ . Der gewählte einfache Ansatz für die Richtungsichte  $du$  ist bereits auf die nachfolgend vorliegende Rotationssymmetrie bezüglich der  $z$ -Achse zugeschnitten.

Für eine kompakte und bezüglich  $Z$  sternförmige Punktmenge  $A \subset R$  bezeichne  $p = p(u)$  die Länge der Radialstrecke  $A \cap H_u$ . Wir wollen hier  $A$   $K$ -konvex nennen, wenn der Durchschnitt  $A \cap G$  für jede zu einer Koordinatenrichtung parallele Gerade  $G$  zusammenhängend oder leer ausfällt;  $A$  ist also konvex in den Richtungen  $x, y, z$ . Abb. 1 zeigt die Meridianfigur eines bezüglich der  $z$ -Achse rotationssymmetrischen und  $K$ -konvexen Körpers.

---

Eingegangen am 21. Januar 1968.

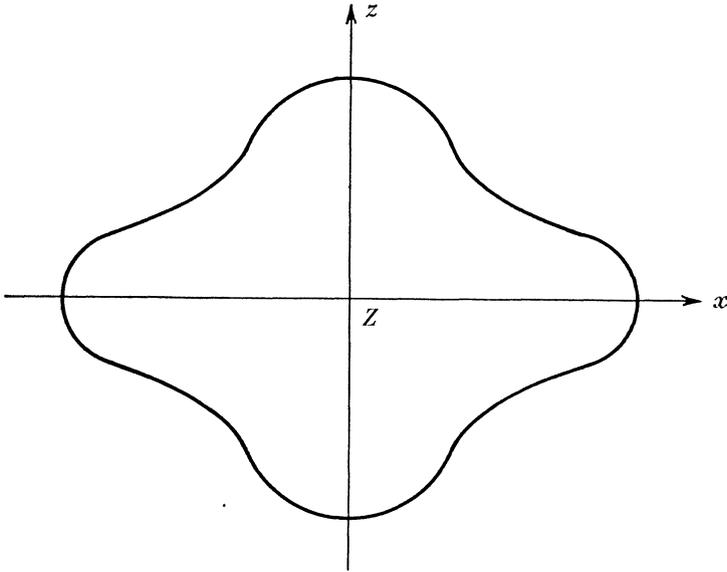


Abb. 1

## 2. Satz; Kommentar der Ergebnisse.

Es sei  $0 \leq \alpha, \beta < \infty$  und  $A$  ein kompakter, bezüglich  $Z$  sternförmiger Körper. Mit den Ansätzen

$$(1) \quad I_\beta(A) = \int p(u)^\beta du,$$

$$(2) \quad J_\alpha(A, u) = \int p(v)^\alpha d_u v$$

erklären wir das Radialpotenzintegral  $I_\beta$  von  $A$  in  $R$  und das Radialpotenzintegral  $J_\alpha$  von  $A \cap E_u$  in  $E_u$ . In der vorliegenden Note beweisen wir den folgenden

**SATZ.** *Sind  $A$  und  $B$  zwei kompakte, bezüglich  $Z$  sternförmige und zentralsymmetrische und bezüglich der  $z$ -Achse rotationssymmetrische Körper und ist ausserdem  $A$   $K$ -konvex, so gilt für  $0 < \alpha < \beta \leq \alpha + 1$  die folgende Ungleichheitsaussage:*

$$(3) \quad J_\alpha(A, u) \leq J_\alpha(B, u), \quad \forall u \in S \Rightarrow I_\beta(A) \leq I_\beta(B).$$

Das wichtigste Korollar ist mit dem Sonderfall  $\alpha = 2$  und  $\beta = 3$  gegeben, wobei  $J_2(A, u) = 2f(A \cap E_u)$  und  $I_3(A) = 3V(A)$  zu vermerken ist, wenn  $f$  den Flächeninhalt und  $V$  das Volumen bedeuten. Mit (3) resultiert hier die Busemannsche Aussage

$$(4) \quad f(A \cap E_u) \leq f(B \cap E_u), \quad \forall u \in S \Rightarrow V(A) \leq V(B)$$

in dem hier vorliegenden speziellen Fall rotationssymmetrischer Körper im gewöhnlichen Raum. — Nach einer Vermutung von H. Busemann und C. M. Petty [1] soll unsere Aussage (4) wesentlich allgemeiner für zentralsymmetrische konvexe Körper Gültigkeit haben. Dass man weder auf Zentralsymmetrie noch auf Konvexität verzichten kann, wurde mittlerweile mehrfach durch Beispiele belegt. Vgl. hierzu auch insbesondere H. Busemann [2].

Auch die von uns nachfolgend angegebenen Beispiele zeigen, dass auch im rotationssymmetrischen Fall die Voraussetzung der  $K$ -Konvexität und der Zentralsymmetrie unentbehrlich sind.

Die Busemannsche Frage wurde auch als ungelöstes Problem [3] ausgeschrieben, doch ist bis jetzt (September 1967) noch keine vollständige Lösung bekannt geworden.

Unser Satz zeigt, dass eine Konvexitätsforderung, die schwächer als die übliche ist, bei  $A$  bereits ausreicht und dass bezüglich  $B$  keine ebensolche Voraussetzung erforderlich ist, falls man sich auf Rotationskörper beschränkt.

### 3. Beispiele.

a) Satz (3) wird falsch, wenn die Voraussetzung der  $K$ -Konvexität des Körpers  $A$  nicht erfüllt ist. Dies zeigt das folgende Beispiel: Es sei  $r = [\frac{1}{2}(\pi + 1)]^{\frac{1}{2}}$  und  $A$  durch  $p(u) = 1/|\xi|$  für  $[1 + r^2]^{-\frac{1}{2}} \leq |\xi| \leq 1$  und

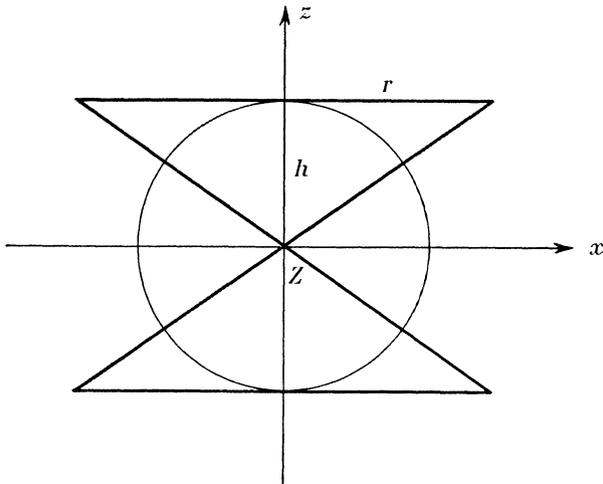


Abb. 2

$p(u) = 0$  für  $0 \leq |\xi| < [1+r^2]^{-\frac{1}{2}}$  gegeben.  $A$  ist ein zentralsymmetrischer Rotationsdoppelkegel mit Doppelspitze  $Z$ ; der Einfachkegel hat die Höhe  $h=1$  und den Bodenradius  $r \sim 1,4390 \dots$ . Abb. 2 stellt die Meridianfigur von  $A$  dar. Weiter sei  $B$  die Einheitskugel  $K$ . Wie einfache Rechnung ergibt, gilt

$$\begin{aligned} f(A, u) &= 2[(1+r^2)\xi^2 - 1]^{\frac{1}{2}}/\xi^2 & \text{für } [1+r^2]^{-\frac{1}{2}} \leq |\xi| \leq 1, \\ f(A, u) &= 0 & \text{für } 0 \leq |\xi| < [1+r^2]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Es folgt die für alle  $u$  gültige Abschätzung  $f(A, u) \leq \frac{1}{2}(\pi + 2) < \pi$ . Andererseits ist  $f(B, u) = \pi$ , sodass also die linke Seite von (4) gültig ist. Die Folgerung rechts von (4) aber ist falsch, was mit  $V(A) = \frac{1}{3}\pi(\pi+1) > \frac{4}{3}\pi$  und  $V(B) = \frac{4}{3}\pi$  belegt ist.  $A$  ist in der  $z$ -Richtung nicht konvex.

b) Ebenso ist Satz (3) falsch, wenn die Voraussetzung der Zentralsymmetrie des Körpers  $A$  nicht erfüllt ist. Hier dient das folgende Beispiel:  $A$  sei durch  $p(u) = [\frac{1}{2}(2 + \xi^2)]^{\frac{1}{2}}$  für  $0 \leq \xi \leq 1$  und  $p(u) = [\frac{1}{2}(2 - \xi^2)]^{\frac{1}{2}}$  für  $-1 \leq \xi < 0$  festgelegt.  $A$  ist ein Rotationseikörper der Länge  $(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}$  und der Dicke 2. Abb. 3 zeigt die Meridianfigur von  $A$ .

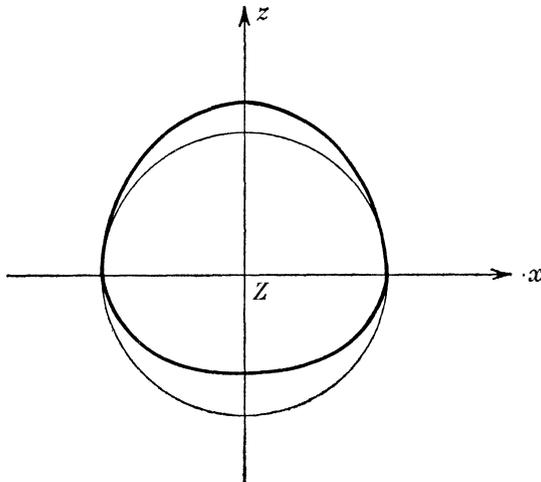


Abb. 3

Wie oben sei  $B$  die Einheitskugel  $K$ . Wie leicht zu erkennen ist, wird  $f(A, u) = \pi$  für alle  $u$ , und mit  $f(B, u) = \pi$  ist die Bedingung links in (4) erfüllt. Die Folgerung rechts in (4) aber ist wieder falsch. Einfache Volumberechnung ergibt

$V(A) = \pi[8 + 12\sqrt{3} + 12\log(\sqrt{2} + \sqrt{6}) - 12\log 2 + 3\pi]/24\sqrt{2}$   
 oder  $V(A) \sim (1,3585\dots)\pi$ , während  $V(B) = \frac{4}{3}\pi \sim (1,3333\dots)\pi$  ist.

**4. Beweis des Satzes.**

$A$  und  $B$  seien zwei Körper, welche die Voraussetzungen des Satzes (3) erfüllen, und  $p(u)$  und  $q(u)$  sollen die Radialstreckenlängen von  $A$  und  $B$  bedeuten. Wegen der bestehenden Symmetrien ergeben sich für die Radialpotenzintegrale die auf das Winkelintervall  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$  reduzierten Ansätze für  $A$

$$(5) \quad I_\beta(A) = 4\pi \int_0^1 p(\xi)^\beta d\xi,$$

$$(6) \quad J_\alpha(A, u) = 4 \int_0^\tau p(\eta)^\alpha (\tau^2 - \eta^2)^{-\frac{1}{2}} d\eta$$

und analog für  $B$ . Man darf ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Radialfunktionen  $p(\xi)$  und  $q(\xi)$  positiv und stetig differenzierbar sind, da sich beliebige zulässige Körper durch solche beliebig genau approximieren lassen und die Radialpotenzintegrale stetige Körperfunktionale sind.

Wir führen nun die Hilfsfunktion

$$(7) \quad r(\zeta) = p(\zeta)^{\beta-\alpha}$$

ein, und weiter sei

$$(8) \quad K(\tau) = 2\tau \left\{ r(1)(1-\tau^2)^{-\frac{1}{2}} - \int_\tau^1 r'(\zeta)(\zeta^2-\tau^2)^{-\frac{1}{2}} d\zeta \right\}.$$

Wir beweisen jetzt zunächst, dass

$$(9) \quad K(\tau) \geq 0$$

ausfällt. In der Tat: Da  $A$   $K$ -konvex ist, muss im Intervall  $0 \leq \zeta \leq 1$  einerseits  $\zeta p(\zeta)$  monoton zunehmend, andererseits  $(1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}} p(\zeta)$  monoton abnehmend sein, sodass  $\zeta p' + p \geq 0$  und  $(1-\zeta^2)p' - \zeta p \leq 0$  vorgemerkt werden kann. Mit

$$\zeta r' + r = p^{\beta-\alpha-1} [(\beta-\alpha)\zeta p' + p]$$

und

$$(1-\zeta^2)r' - \zeta r = p^{\beta-\alpha-1} [(\beta-\alpha)(1-\zeta^2)p' - \zeta p]$$

resultiert mit  $0 < \beta - \alpha \leq 1$  zunächst

$$(10) \quad \zeta r' + r \geq 0, \quad (1-\zeta^2)r' - \zeta r \leq 0.$$

Weiter dienen uns die Hilfsfunktionen

$$(11) \quad s = \zeta r(\zeta), \quad t = (1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}} r(\zeta), \quad r^2 = s^2 + t^2,$$

und wir denken uns  $t = t(s)$ , wobei zu beachten ist, dass nach (10)  $s = s(\zeta)$  monoton zunehmend,  $t = t(\zeta)$  monoton abnehmend ist, so dass also

$$(12) \quad dt/ds \leq 0$$

ausfällt.

Für den in (8) auftretenden festen Zwischenwert  $\tau$  schreiben wir noch  $s_0 = s(\tau)$ ,  $t_0 = t(\tau)$  und  $r_0 = r(\tau)$ .

Ferner setzen wir

$$T = \int_{\tau}^1 r'(\zeta) (\zeta^2 - \tau^2)^{-\frac{1}{2}} d\zeta = r_0 \int_{s_0}^{r(1)} \left( s + t \frac{dt}{ds} \right) (s^2 r_0^2 - s_0^2 r^2)^{-\frac{1}{2}} ds.$$

Nun ist wegen  $t \leq t_0$

$$s^2 r_0^2 - s_0^2 r^2 = s^2 t_0^2 - s_0^2 t^2 \geq t_0^2 (s^2 - s_0^2),$$

und mit Rücksicht auf (12) resultiert

$$T \leq \frac{s_0}{t_0} \int_{s_0}^{r(1)} (s^2 - s_0^2)^{-\frac{1}{2}} s ds = \frac{r_0}{t_0} (r(1)^2 - s_0^2)^{\frac{1}{2}} \leq r(1) (1 - \tau^2)^{-\frac{1}{2}},$$

womit die Zwischenbehauptung (9) abzulesen ist.

Nun führen wir den Hauptbeweis: Nach Voraussetzung in (3) und mit Darstellung (6) hat man zunächst

$$(13) \quad \int_0^{\tau} p(\eta)^{\alpha} (\tau^2 - \eta^2)^{-\frac{1}{2}} d\eta \leq \int_0^{\tau} q(\eta)^{\alpha} (\tau^2 - \eta^2)^{-\frac{1}{2}} d\eta$$

und nach Multiplikation mit der gemäss (9) definiten Hilfsfunktion (8) und nachfolgender Integration nach  $\tau$

$$(14) \quad \int_0^1 \int_0^{\tau} p(\eta)^{\alpha} (\tau^2 - \eta^2)^{-\frac{1}{2}} K(\tau) d\eta d\tau \leq \int_0^1 \int_0^{\tau} q(\eta)^{\alpha} (\tau^2 - \eta^2)^{-\frac{1}{2}} K(\tau) d\eta d\tau.$$

Mit Vertauschung der Integrationsreihenfolge resultiert

$$(15) \quad \int_0^1 p(\eta)^{\alpha} L(\eta) d\eta \leq \int_0^1 q(\eta)^{\alpha} L(\eta) d\eta,$$

wobei zur Abkürzung

$$(16) \quad L(\eta) = \int_{\eta}^1 K(\tau) (\tau^2 - \eta^2)^{-\frac{1}{2}} d\tau$$

gesetzt wurde. Mit Einsatz des Ausdrucks für  $K(\tau)$  nach (8) und einfacher Durchrechnung, insbesondere mit Anwendung der für  $0 \leq a < b < \infty$  gültigen Integralformel

$$\int_a^b [(b - \omega)(\omega - a)]^{-\frac{1}{2}} d\omega = \pi,$$

erzielen wir das Ergebnis

$$(17) \quad L(\eta) = \pi r(\eta) = \pi p(\eta)^{\beta - \alpha}.$$

Wird dies in (15) verwendet, so resultiert der Vergleich

$$(18) \quad \int_0^1 p(\eta)^\beta d\eta \leq \int_0^1 q(\eta)^\alpha p(\eta)^{\beta - \alpha} d\eta.$$

Nun führt die naheliegende Verwendung der Hölderschen Ungleichung beim rechtsseitigen Integral mit dem Exponentensatz  $\varrho, \sigma > 1, 1/\varrho + 1/\sigma = 1$  bei der speziellen Wahl  $\varrho = \beta/\alpha, \sigma = \beta/(\beta - \alpha)$  zur Ungleichung

$$(19) \quad \int_0^1 p(\eta)^\beta d\eta \leq \left( \int_0^1 q(\eta)^\beta d\eta \right)^{\alpha/\beta} \left( \int_0^1 p(\eta)^\beta d\eta \right)^{(\beta - \alpha)/\beta},$$

die nach einfacher Umformung in

$$(20) \quad \int_0^1 p(\eta)^\beta d\eta \leq \int_0^1 q(\eta)^\beta d\eta$$

übergeht. Dies ist aber, wie ein Rückblick auf (1) lehrt, die zu beweisende Aussage rechts in (3).

**Nachtrag während des Druckes.**

Wie Herr H. Busemann (Los Angeles) dem Verfasser in freundlicher Weise zur Kenntnis brachte, ist der sich auf Hauptschnittflächen und Volumina beziehende Sonderfall des Satzes [Korollar (4)], d.h. die Richtigkeit der Busemannschen Vermutung für rotationssymmetrische Körper, auch von Herrn M. Giertz (Stockholm) nachgewiesen worden.

Die entsprechende Arbeit, die längere Zeit unveröffentlicht blieb, wurde jetzt auch zum Druck eingereicht und wird in Band 25 (1969) dieser Zeitschrift erscheinen.

## LITERATUR

1. H. Busemann and C. M. Petty, *Problems on convex bodies*, Math. Scand. 4 (1956), 88–94.
2. H. Busemann, *Volumes and areas of cross-sections*, Amer. Math. Monthly 67 (1960), 248–250.
3. Ungelöstes Problem Nr. 44, Elem. Math. 17 (1962), 84. (Mitgeteilt von V. L. Klee.)

UNIVERSITÄT BERN, SCHWEIZ