MATH. SCAND. 19 (1966), 219–222

IDÉAUX FERMÉS DE L^1 DANS LESQUELS UNE SUITE APPROCHE L'IDENTITÉ

YVES MEYER

On désigne par T le groupe quotient $\mathsf{R}/2\pi\mathsf{Z}$. L'algèbre de Banach des fonctions continues, à valeurs complexes, dont la série de Fourier est absolument convergente, définies sur T, est notée $A(T)$. La norme, notée $\|f\|_{A(T)}$, d'un élément f de $A(T)$ est la somme des modules des coefficients de Fourier. L'algèbre de Banach des transformées de Fourier des éléments de $L^1(\mathsf{R})$ est notée $A(\mathsf{R})$ et, pour tout élément k de $L^1(\mathsf{R})$, on pose:

$$\|\hat{k}\|_{A(\mathsf{R})} = \|k\|_1 . \tag{1}$$

DÉFINITION 1. *Pour tout fermé E de T, $\hat{I}_E$ est l'idéal fermé de $A(T)$ composé de tous les éléments de $A(T)$ nuls sur E et, si g est un élément de $A(T)$, on pose:*

$$\|g\|_E = \sup\{\|fg\|_{A(T)} \; ; \; f \in \hat{I}_E, \; \|f\|_{A(T)} \leqq 1\} . \tag{2}$$

En d'autres termes, $\|g\|_E$ est la norme de l'endomorphisme de $\hat{I}_E$ défini par la multiplication par g.

DÉFINITION 2. *Le fermé E de T est un ensemble de Ditkin fort s'il satisfait à la synthèse spectrale et si, dans $\hat{I}_E$, une suite approche l'identité, c'est à dire si l'on peut trouver une suite $(f_n)_{n\geqq 0}$ d'éléments de $\hat{I}_E$ telle que, pour tout élément f de $\hat{I}_E$, on ait:*

$$\|ff_n - f\|_{A(T)} \to 0 \quad (n \to +\infty) . \tag{3}$$

REMARQUE. La propriété de synthèse spectrale montre alors que l'on peut imposer aux f_n d'être nulles au voisinage de E. S'il en est ainsi, la synthèse spectrale est « fortement » vérifiée d'après (3).

La condition (3) entraîne, grâce au théorème de Banach–Steinhaus, la condition:

$$\sup \|f_n\|_E < +\infty . \tag{4}$$

Reçu le 27. septembre 1966.

Cette note répond à un problème posé par I. Wik dans [4]. Des discussions avec Paul Haskell Rosenthal, invité à Strasbourg par l'I.R.M.A., ont été à l'origine de ce travail.

Si, réciproquement, (4) est vérifié, il suffira de vérifier (3) pour une partie dense dans $\hat{I}_E$; ce sera immédiat dans l'exemple donné.

Pour mieux comprendre ce qui suit, il est bon, mais non indispensable, de connaître le résultat suivant, démontré en [1].

PROPOSITION 1. *Si E est un fermé de T (ou R), si F est la fermeture de l'intérieur de E, pour tout élément g de $A(T)$ (ou $A(\mathsf{R})$), on a*:

$$\|g\|_E = \|g\|_F . \tag{5}$$

Si E est sans intérieur, la condition (4) signifie donc:

$$\sup \|f_n\|_{A(\mathsf{R})} < +\infty . \tag{6}$$

D'autre part, les f_n, nulles sur E, convergent vers 1 sur son complémentaire; d'après Rosenthal [3] et Wik [4], un ensemble de Ditkin fort sans intérieur de T est donc fini. Les réunions finies d'intervalles fermés de T sont des ensembles de Ditkin forts. Le théorème ci-dessous fournit un ensemble de Ditkin fort d'un type différent.

THÉORÈME. *La réunion de l'intervalle $[-\varepsilon, 0]$, $\varepsilon > 0$, de T et d'une suite $(X_n)_{n \geqq 0}$ de points de T vérifiant*:

$$0 < X_{n+1} \leqq \alpha X_n, \qquad 0 < \alpha < 1 ,$$

est un ensemble de Ditkin fort.

(Les notions d'intervalle et de suite lacunaire à la Hadamard, tendant vers 0, se déduisent de l'isomorphisme local entre R et T).

Avant de démontrer le théorème, faisons les remarques suivantes: en appliquant la proposition 1, on observe que les f_n doivent vérifier les conditions ci-dessous:

$$\begin{gathered} \sup \|f_n\|_{[-\varepsilon, 0]} < +\infty , \\ f_n = 0 \text{ sur } [-\varepsilon, 0], \quad f_n(X_k) = 0 , \\ f_n(X) \to 1 \quad (X \in \complement E,\ n \to +\infty) . \end{gathered} \tag{7}$$

Le calcul des normes $\|f\|_{[-\varepsilon, 0]}$ se ramène, grâce aux isomorphismes locaux entre R et T à des calculs, pour des éléments F de $A(\mathsf{R})$, d'expressions $\|F\|_{]-\infty, 0]}$.

D'autre part, sur l'intervalle $[0, X_0]$, le graphe de $1 - f_n(X)$ doit ressembler, d'après la dernière condition de (7), à une série de « pics » disposés au dessus des X_k.

Il devient alors naturel d'utiliser le lemme suivant, démontré dans [2], (théorème 2).

Lemme. *A un réel α de l'intervalle* $]0,1[$, *on peut associer une constante* B_α *telle que, si la suite réelle* $(S_k)_{0 \leqq k \leqq n}$ *vérifie*:

$$0 < S_{k+1} \leqq \alpha S_k, \qquad 0 \leqq k \leqq n-1 ,$$

et si φ, *dans* $A(\mathsf{R})$, *est nulle hors de* $]-S_n, S_n[$, *on ait*:

$$(8) \qquad \left\| \sum_0^n a_k \varphi(X - S_k) \right\|_{]-\infty,0[} \leqq B_\alpha \|\varphi\|_{A(\mathsf{R})} \sup\nolimits_{0 \leqq k \leqq n} |a_k| ,$$

ou les a_k *sont des nombres complexes arbitraires.*

Démonstration du théorème. Appelons Δ_n l'élément de $A(T)$ égal à 1 en 0, à 0 hors de $]-X_n, X_n[$, linéaire sur $[0, X_n]$ et $[0, -X_n]$, et soit g_n un élément de $A(T)$, nul sur $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, 0$ et égal à 1 hors de $]-\varepsilon, X_n[$; la condition $X_n \geqq \alpha^{-1} X_{n+1}$ nous permet de choisir la suite des g_n de façon que

$$\sup \|g_n\|_{A(T)} < +\infty .$$

On pose:

$$h_n = g_n \left(1 - \sum_{k=0}^n \Delta_n(X - X_k)\right) .$$

Alors (8) entraîne:

$$(9) \qquad \sup\nolimits_{n \geqq 0} \|h_n\|_E < +\infty .$$

En remarquant que $h_n(0) = 0$, on peut remplacer h_n par f_n définie par:

$$(10) \qquad \begin{cases} f_n(X) = 0 & \text{sur } [-\varepsilon, 0], \\ f_n(X) = h_n(X) - h_n(X) \Delta_n(X + \varepsilon) & \text{ailleurs} . \end{cases}$$

On a encore:

$$(11) \qquad \sup\nolimits_{n \geqq 0} \|f_n\|_E < +\infty \quad \text{et} \quad f_n \in \hat{I}_E .$$

La frontière de E est dénombrable et E est un ensemble de synthèse spectrale. Une partie totale dans $\hat{I}_E$ est formée des éléments nuls sur $[-\varepsilon, X_0]$ et de ceux nuls hors de l'un des $]X_k, X_{k+1}[$, $k \geqq 0$. Dans chaque cas, la vérification de (3) est immédiate.

Le résultat ci-dessus appelle quelques questions: on peut montrer que la réunion de l'arc $[-\varepsilon, 0]$ et de la suite $(2^{-m} + 2^{-n})_{0 \leqq n \leqq m \leqq 2n}$ n'est pas un ensemble de Ditkin fort. Cela laisse ouvert le problème de savoir pour quelles suites réelles positives tendant en décroissant vers 0, $(X_n)_{n \geqq 0}$, la réunion de $[-\varepsilon, 0]$ et de cette suite est un ensemble de Ditkin fort.

BIBLIOGRAPHIE

1. Y. Meyer, *Prolongement des multiplicateurs d'idéaux fermés de $l^1(R^n)$*, C. R. Acad. Sci. Paris 262 (1966), 744–745.
2. Y. Meyer, *Multiplicateurs des coefficients de Fourier des fonctions intégrables analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris 263 (1966), 385–387.
3. H. P. Rosenthal, *Sur les ensembles de Ditkin forts*, C. R. Acad. Sci. Paris 262 (A) (1966), 873–876.
4. I. Wik, *A strong form of spectral synthesis*, Ark. Mat. 6 (1965), 55–64.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
2, RUE GOETHE, STRASBOURG